



Physikalisches A-Praktikum

## Versuch 14

# Wechselstromwiderstände

Praktikanten:	Julius Strake	Betreuer:	Johannes Schmidt
	Niklas Bölter	Durchgeführt:	18.09.2012
Gruppe:	B006	Unterschrift:	_____

E-Mail: [niklas.boelter@stud.uni-goettingen.de](mailto:niklas.boelter@stud.uni-goettingen.de)  
[julius.strake@stud.uni-goettingen.de](mailto:julius.strake@stud.uni-goettingen.de)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
2.1	Wechselspannung und Wechselstrom . . . . .	4
2.2	Die Impedanz . . . . .	4
2.3	Resonanzphänomene . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Induktivität und Gesamtwiderstand . . . . .	8
4.2	Der Serienresonanzkreis . . . . .	8
4.3	Zusammenfassung . . . . .	9
4.4	Parallelkreis . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
<b>A</b>	<b>Tabellen und Grafiken</b>	<b>14</b>

## 1 Einleitung

In diesem Versuch soll die Impedanz, auch Wechselstromwiderstand genannt, von verschiedenen Bauteilen wie Spule, Kondensator und Widerstand gemessen werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Wechselspannung und Wechselstrom

Liegen in einem Stromkreis Wechselspannungen  $U(t)$  und -ströme  $I(t)$  mit sinusförmigem Verlauf vor, so gilt:

$$\begin{aligned}U(t) &= U_0 \cos(\omega t) \\ I(t) &= I_0 \cos(\omega t),\end{aligned}$$

wobei  $U_0$  und  $I_0$  die jeweiligen Scheitelwerte und  $\omega$  die Frequenz bezeichnen.

Kennt man bei einem solchen Stromkreis ohne Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Spannung und Strom den (reellen) Widerstand  $R_\Omega$ , so lassen sich  $U$  und  $I$  einfach über das OHMSche Gesetz ineinander umrechnen:  $U = R_\Omega I$ .

### 2.2 Die Impedanz

Da im allgemeinen auch Induktivitäten und Kapazitäten in Stromkreisen enthalten sind, wird der Widerstand aufgrund der Phasenverschiebung zeitabhängig. Es bietet sich dann an,  $U(t)$  und  $I(t)$  komplex darzustellen via

$$\begin{aligned}U(t) &= U_0 e^{i\omega t} \\ I(t) &= I_0 e^{i\omega t}.\end{aligned}$$

Es gilt dann  $I_0 = I_0 e^{i\varphi}$ , die Phasenverschiebung wurde in die komplexe Amplitude  $I_0$  absorbiert.

Aufgrund der Zeitabhängigkeit des Ohmschen Widerstandes wird bei Wechselstromnetzwerken oft die komplexe Größe *Impedanz*  $Z$  angegeben, die sich analog zum Widerstand aus komplexer Spannung und komplexem Strom berechnet (Meschede, 2006):

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{I_0} e^{-i\varphi}.$$

Wie leicht zu sehen ist, ist diese Größe zeitunabhängig.

Bezeichnet  $Z_L$  den induktiven,  $Z_C$  den kapazitiven und  $R$  den Ohmschen Widerstand, so gilt für die Impedanz im RLC-Schwingkreis (Meschede, 2006):  $Z = Z_L + Z_C + R$ . Um  $Z_L$  und  $Z_C$  genauer zu bestimmen, nutzt man die von Spule und

Kondensator bekannten Zusammenhänge (Meschede, 2006):

$$\begin{aligned}
 U &= LI = U_0 e^{i\omega t} \\
 \Rightarrow I &= \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} \\
 &= \frac{U_0}{Z_L} e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= CU_0 e^{i\omega t} \\
 \Rightarrow I &= \dot{Q} = i\omega CU_0 e^{i\omega t} = -\frac{\omega C}{i} U_0 e^{i\omega t} \\
 &= \frac{U_0}{Z_C} e^{i\omega t}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Die Impedanz in einem solchen Stromkreis wird durch Addition der obigen Widerstände bestimmt (Meschede, 2006, S. 403):

$$Z = i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + R. \tag{3}$$

Analog zur Parallelschaltung Ohmscher Widerstände ergeben in einem Parallelkreis die inversen Widerstände addiert die invertierte Impedanz (Meschede, 2006, S. 403):

$$\frac{1}{Z} = i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) + \frac{1}{R}. \tag{4}$$

Da der Strom gegenüber der Spannung im allgemeinen mit dem Winkel  $\varphi$  phasenverschoben ist, kann man aus der Impedanz (siehe auch Abb. 1) die Phasenverschiebung ablesen via:

$$\varphi = \arctan \frac{\Im(Z)}{\Re(Z)} = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{5}$$

## 2.3 Resonanzphänomene

Betrachtet man einen RLC-Schwingkreis, so ist aus Gleichung 3 leicht abzulesen, dass die Impedanz minimal wird wenn  $Z_L + Z_C = 0$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{\omega_0 C} &= i\omega_0 L \\
 \Rightarrow \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

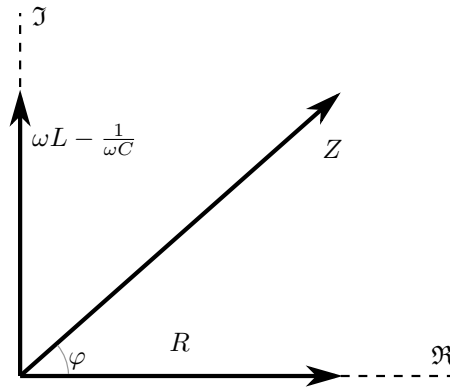


Abbildung 1: Zeigerdiagramm zur Veranschaulichung der Impedanz

### 3 Durchführung

Zunächst wird die in Abbildung 2 gezeigte Schaltung aufgebaut. Das Oszilloskop misst dabei die am Widerstand abfallende<sup>1</sup> und die vom Frequenzgenerator bereitgestellte Spannung.

Bei eingeschaltetem Schalter (und dadurch kurzgeschlossenem Kondensator) wird nun Spannung und Strom jeweils mit dem Multimeter sowie die Phasenverschiebung zwischen beiden mit dem Oszilloskop gemessen. Zu Messung der Phasenverschiebung sollten die beiden Cursor des Oszilloskops auf je ein Maximum gestellt werden, sodass der Wert der Verschiebung leicht abgelesen werden kann. Diese Messung wird für 10 verschiedene Frequenzen durchgeführt.

Zur nächsten Messung wird der Schalter wieder geöffnet. Bei verschiedenen Frequenzen im einstellbaren Bereich wird dann der Strom, die über die gesamte Schaltung abfallende Spannung, die Phasenverschiebung, sowie die Spannungen am Kondensator und an Widerstand und Spule zusammen gemessen. Es ist darauf zu achten, die Resonanzstelle mit kleineren Frequenzschritten von bis zu  $\Delta\nu = 3 \text{ Hz}$  zu vermessen.

Nun wird die Schaltung umgebaut, sodass ein Parallelkreis entsteht (siehe Abb. 3). Wiederum wird bei Frequenzen im gesamten einstellbaren Bereich die Spannung, der Strom und die Phasenverschiebung notiert. Zu achten ist erneut auf eine genaue Vermessung des Resonanzbereichs.

Anschließend werden der Innenwiderstand des Amperemeters und der Widerstand des Ohmschen Widerstandes mit einem Multimeter bestimmt. Auch der Ohmsche Widerstand der Spule und die Kapazität des Kondensators werden damit gemessen.

<sup>1</sup>Hiermit kann später mit dem Ohmschen Gesetz der Strom bestimmt werden.

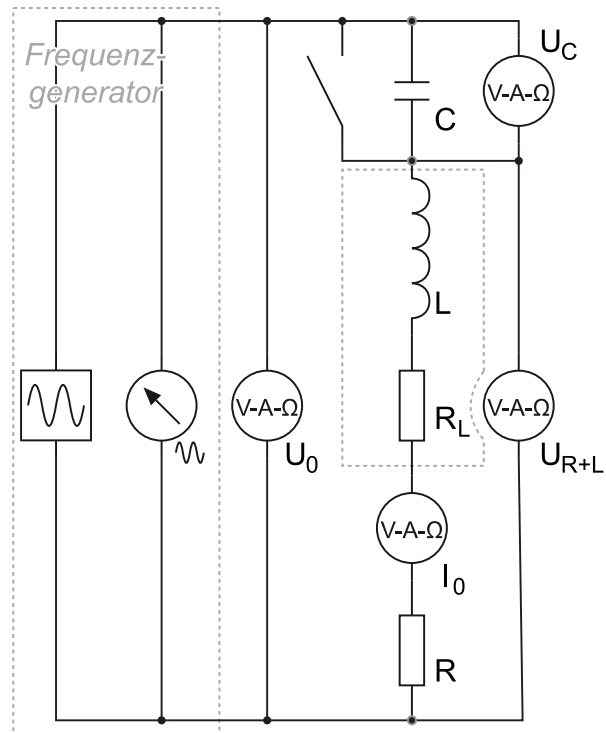


Abbildung 2: Schaltplan für den Serienschwingkreis (verändert nach LP (Prior u. a.))

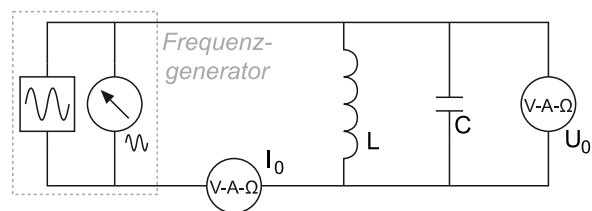


Abbildung 3: Schaltplan für den Parallelkreis (verändert nach LP (Prior u. a.))

## 4 Auswertung

### 4.1 Induktivität und Gesamtwiderstand

Bei diesem Versuchsteil wurde der Kondensator überbrückt, es wird also  $C = 0$  F angenommen. Die Spule und der Widerstand werden in Reihe geschaltet. Berechnet man nun bei Formel (3) auf beiden Seiten die Betragsquadrate, ergibt sich:

$$Z^2 = L^2 \cdot \omega^2 + R^2.$$

Folglich wurde in Abbildung 4 die quadratische Impedanz über der quadratischen Kreisfrequenz aufgetragen. Mittels einer linearen Regression<sup>2</sup>  $y = mx + b$  können nun leicht die beiden Größen bestimmt werden.

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{m} = (0.382 \pm 0.067) \text{ H} \\ R &= \sqrt{b} = (0.3 \pm 43.2) \Omega \end{aligned}$$

### 4.2 Der Serienresonanzkreis

Nun wurde der Kondensator<sup>3</sup> mit den anderen beiden Bauteilen in Reihe geschaltet. In Abbildung 5 wurde die Impedanz über der Kreisfrequenz aufgetragen, und zusätzlich der theoretische Verlauf mittels Formel (3) eingezeichnet. Da sich am Punkt der Resonanz die Wechselstromwiderstände von Spule und Kondensator genau aufheben (vergl. Formel (6)), kann im Minimum der Impedanzkurve der OHMSche Widerstand als Ordinate und die Resonanzfrequenz als Abszisse abgelesen werden.

$$\begin{aligned} \omega_{0,\text{Impedanz}} &= (1279 \pm 20) \text{ Hz} \\ R &= (81 \pm 1) \Omega \end{aligned}$$

Die Resonanzfrequenz kann auch direkt mit dem Oszilloskop gemessen werden. Da im Resonanzpunkt die gesamte Impedanz aus dem OHMSchen-Widerstand besteht, ist ihr Imaginärteil Null und damit auch die Phasendifferenz.

Die Phasendifferenzen wurden in Abbildung 6 über der Kreisfrequenz aufgetragen, dabei wurde die theoretische Kurve mittels Formel (5) und den mit den Multimetern gemessenen Größen vorhergesagt, und auch mittels dieser Formel die Regression durchgeführt. Aus dem Nulldurchgang dieser Regression wurde dann die Resonanzfrequenz bestimmt.

$$\omega_{0,\text{Phasenverschiebung}} = (1275 \pm 20) \text{ Hz}$$

<sup>2</sup>via gnuplot,  $\chi_{\text{red}}^2 \approx 0.052$

<sup>3</sup> $C = (1.68 \pm 0.13) \mu\text{F}$



### 4.3 Zusammenfassung

Nun können gewichtete Mittel aus den obigen Ergebnissen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (1277 \pm 15) \text{ Hz} \\ R &= (81 \pm 1) \Omega \end{aligned}$$

Zieht man nun vom Gesamtwiderstand den gemessenen OHMSchen Widerstands ab, so erhält man den Widerstand der Spule:

$$R_L = (71.0 \pm 1.1) \Omega$$

Umstellen von Formel (6) ermöglicht nun das Berechnen der Kapazität:

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = (1.61 \pm 0.29) \mu\text{F}$$

Die über den drei Bauelementen abfallenden Spannungen  $U$ ,  $U_C$  und  $U_{L+R}$  wurden in Abbildung 7 aufgetragen.

Für die oben berechnete Resonanzfrequenz wurde ein Zeigerdiagramm der drei Spannungen in Abbildung 9 gezeichnet. Aus dem geometrischen Zusammenhang des Zeigerdiagramms ergibt sich nun auch die Phasenverschiebung zwischen  $U$  und  $U_{L+R}$ :

$$\varphi = \arccos\left(\frac{U}{U_{L+R}}\right) = (80.13 \pm 0.94)^\circ$$

Dabei wurde  $U$  auf die reelle Achse gezeichnet, da im Resonanzfall die Phasenverschiebung zwischen  $U$  und  $I$  ja Null ist.

### 4.4 Parallelkreis

Auch die Impedanz im Parallelkreis wurde in Abbildung 8 über der Kreisfrequenz aufgetragen. Wie erwartet ergibt sich im Vergleich zum Serienresonanzkreis ein umgekehrtes Bild. Bei niedrigen oder hohen Frequenzen ist der Wechselstromwiderstand von Spule bzw. des Kondensators und damit wegen der Parallelschaltung auch die gesamte Impedanz sehr gering, so dass sich hier stattdessen ein Maximum bei mittleren Frequenzen ausbildet.

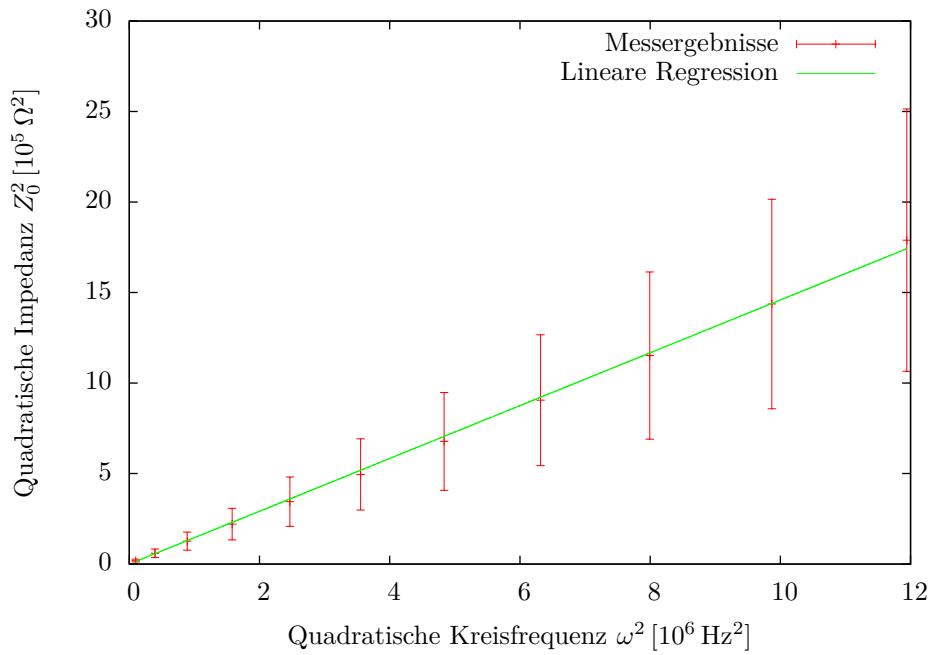


Abbildung 4: Frequenzabhängigkeit der Impedanz im  $RL$ -Schaltkreis ( $C$  überbrückt)

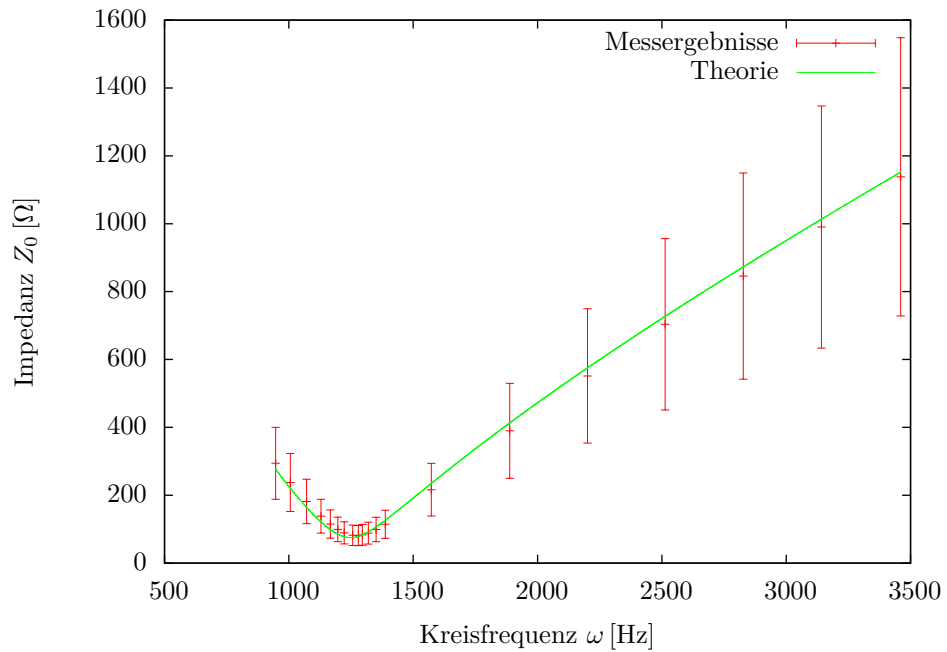


Abbildung 5: Frequenzabhängigkeit der Impedanz im Serienresonanzkreis

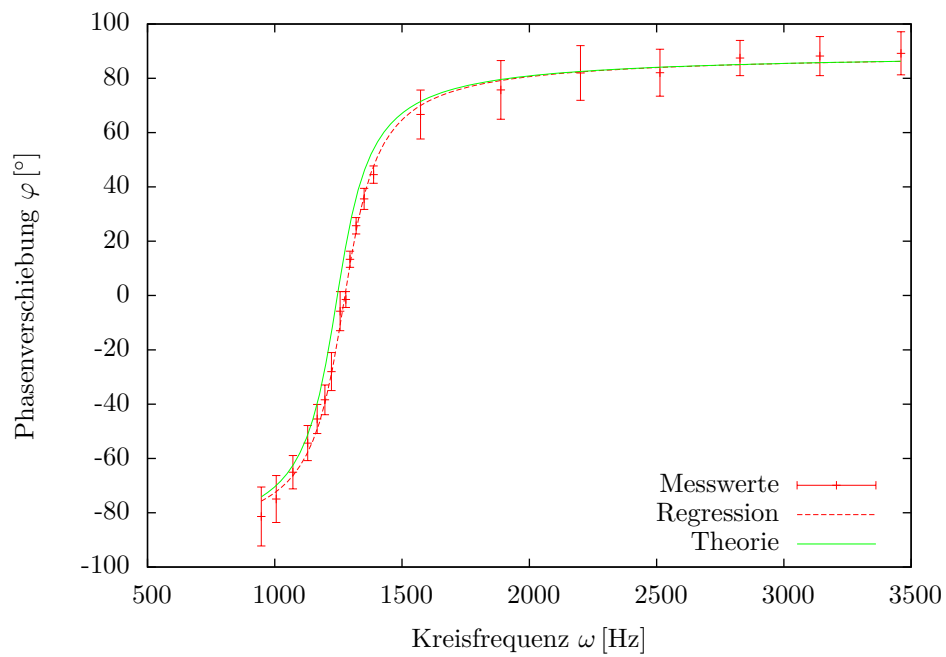
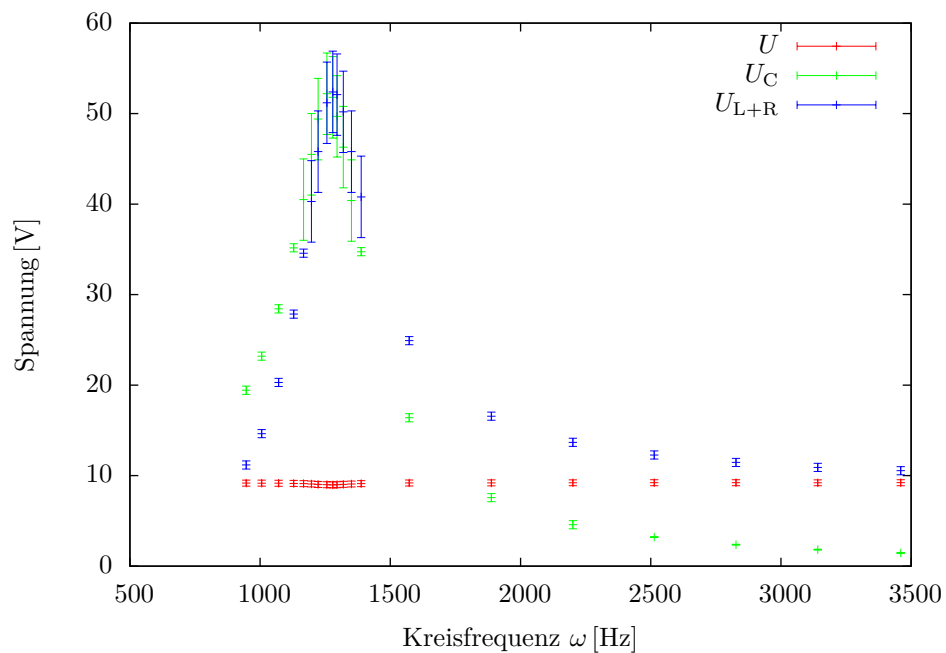
Abbildung 6: Phasenverschiebung zwischen  $U$  und  $I$  im Serienresonanzkreis

Abbildung 7: Abfallende Spannungen im Serienresonanzkreis

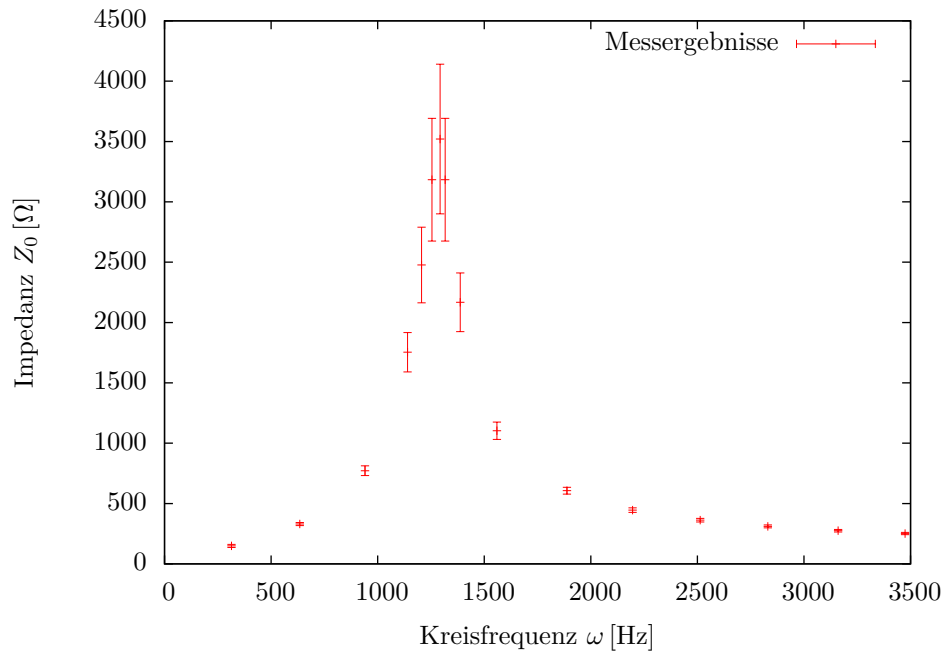


Abbildung 8: Frequenzabhängigkeit der Impedanz im Parallelkreis

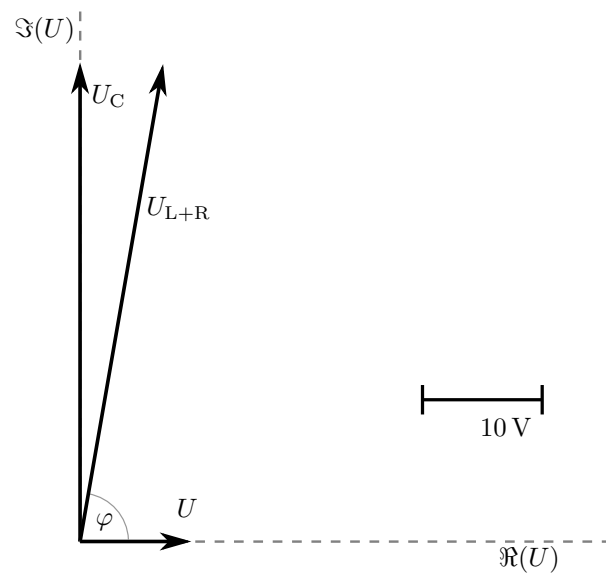


Abbildung 9: Zeigerdiagramm der Spannungen im Serienresonanzkreis

## 5 Diskussion

Betrachtet man die erstellten Graphen, so fällt sofort die Konsistenz von Theorie und Messung auf. Bei nahezu allen Messungen liegen die theoretisch ermittelten Graphen zumindest im Fehlerintervall der Messwerte.

Allein die Phasenverschiebung im Serienresonanzkreis zeigt eine Abweichung von bis zu 109 % Prozent im Resonanzbereich. Dieser große Fehler könnte aus dem fortgeplanten Fehler der Frequenz entspringen: Bei der großen Steigung des Graphen im Bereich der Resonanzfrequenz wirken sich selbst kleine Ungenauigkeiten sehr stark auf die Abweichung vom theoretischen Wert aus.

Auffällig sind auch die stark variierenden Fehler einzelner Werte (siehe beispielsweise Abb. 4 oder 8). Diese sind bei der Frequenzabhängigkeit der Impedanz im Serienkreis durch das Quadrieren des Wertes zu erklären. Beim Parallelkreis wurde der Messbereich des Multimeters während der Messung gewechselt, sodass hier die größeren Fehler der Werte über  $1600\ \Omega$  aus der Ungenauigkeit des Messgerätes resultieren.

Beim ersten Auswertungspunkt wurde der Widerstand mittels dem Y-Achsenabschnitt der linearen Regression ermittelt. Da die quadratischen Impedanzen in Abbildung 4 jedoch im Verhältnis zum quadratischen Widerstand extrem stark wachsen, ist das ermittelte Ergebnis nicht vertrauenswürdig, was auch durch den großen Fehler ausgedrückt wird. Vertraut man der zweiten Bestimmung, so ist der quadratische Widerstand nämlich  $R^2 \approx 6600\ \Omega^2$ , während die gesamte quadratische Impedanz über  $Z^2 \approx 1700000\ \Omega^2$  steigt.

## A Tabellen und Grafiken

### Literatur

[Meschede 2006] MESCHEDÉ, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Ausgabe. Springer, 2006

[Prior u. a. ] PRIOR, Mira ; GROSSE-KNETTER, Jörn ; SCHAAF, Peter: *LP - Wechselstromwiderstände*. – URL <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/4165>. – Zugriffsdatum: 2012-09-17