



Physikalisches A-Praktikum

Versuch 9

Diffusion

Praktikanten:	Julius Strake	Betreuer:	Hendrik Schmidt
	Niklas Bölter	Durchgeführt:	29.05.2012
Gruppe:	17	Unterschrift:	_____

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Diffusion in überschichteten Flüssigkeiten	4
3	Durchführung	4
3.1	Konzentrationsverlauf	4
3.2	Konzentrationsprofil	5
4	Auswertung	5
4.1	Qualitative Interpretation anhand von Diffusionskurven	5
4.2	Ermittlung des Diffusionskoeffizienten	6
4.3	Konzentrationsprofil	7
5	Diskussion	9
5.1	Diffusionskoeffizient	9
5.2	Konzentrationsprofil	9
A	Tabellen und Grafiken	10

1 Einleitung

Teilchen in deinem Raum streben durch die Brownsche Molekularbewegung immer einem Zustand möglichst großer Homogenität der Teilchendichte zu. In diesem Versuch soll dieses *Diffusion* genannte Verhalten genauer untersucht werden. Dazu wird die Vermischung von Wasser und Methylenblau gemessen.

2 Theorie

Wenn in einem Fluid die Teilchen eines Stoffes nicht homogen verteilt sind, wirkt die *Brownsche Molekularbewegung* diesem entgegen, denn die zufällige Eigenbewegung der Teilchen führt im zeitlichen Mittel zu einem Teilchenstrom von Gebieten mit hoher Teilchendichte in Gebiete mit kleinerer Teilchendichte. Dieser Vorgang wird *Diffusion* genannt.

Wenn die Teilchenanzahl als Erhaltungsgröße angenommen werden kann, muss für die Teilchendichte $n(\mathbf{x})$ an einem Ort und die Stromdichte des Diffusionsstromes aus diesem Ort $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ offenbar gelten:

$$\frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}).$$

Zusätzlich strömt in Gebieten, in denen sich die Teilchendichte stark ändert, ein größerer Teilchenstrom. Dies wird ausgedrückt durch das *1. FICKSche Gesetz* [2]:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -D \nabla n(\mathbf{x}).$$

Hierbei wird D als *Diffusionskonstante* bezeichnet.

Einsetzen der beiden Gleichungen ergibt nun das *2. FICKSche Gesetz*:

$$\frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot (-D \nabla n(\mathbf{x})) = D \nabla^2 n(\mathbf{x}). \quad (1)$$

2.1 Diffusion in überschichteten Flüssigkeiten

In diesem Versuch sind zu Beginn zwei getrennte Flüssigkeitsphasen übereinander geschichtet. Die von der Höhe abhängige Konzentration $c(h)$ der oberen Flüssigkeit kann also über der Grenzschicht als konstant $c = c_0$ angenommen werden, und als $c = 0$ unterhalb der Grenzschicht.

Mit diesen Anfangsbedingungen lässt sich Gleichung (1) analytisch lösen [1]:

$$c(u, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{u}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]. \quad (2)$$

Dabei bezeichnen u bzw. t die betrachtete Höhe und Zeit sowie $\operatorname{erf}(y)$ die *GAUSSSche Fehlerfunktion*

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y \exp(-v^2) dv.$$

3 Durchführung

3.1 Konzentrationsverlauf

Zunächst muss die WHEATSTONESche Messbrücke wie in Abb. 1 verschaltet werden. Anschließend wird das Licht der Quecksilberlampe auf den Photowiderstand fokussiert, sodass eine maximale Lichtintensität gewährleistet werden kann. Jetzt muss

die Messbrücke geeicht werden, indem ein Graufilter ($c/c_0 = \frac{1}{16}$) vor dem Photowiderstand befestigt wird und das Potenziometer dergestalt eingestellt wird, dass das Ampèremeter keinen Stromfluss anzeigt. Anschließend wird eine Küvette zu

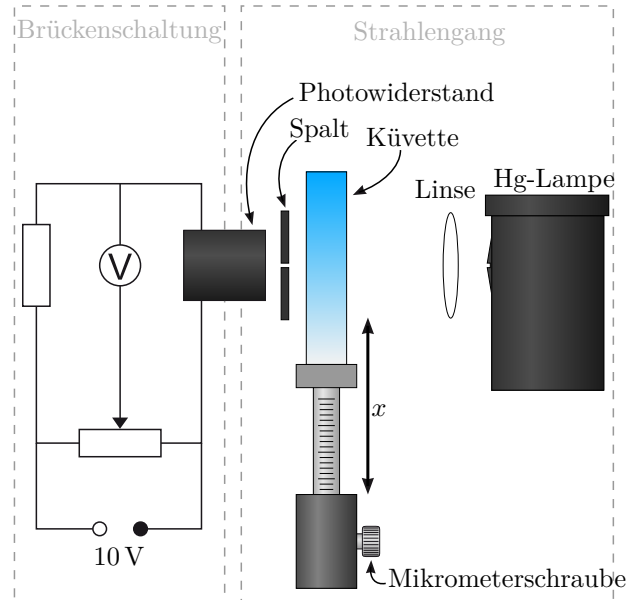


Abbildung 1: Skizze des Aufbaus vom Versuch zur Diffusion (Verändert nach LP [3])

etwa drei Vierteln mit destilliertem Wasser gefüllt. Zusätzlich wird nun eine kleine Menge Ethylenblau hinzugegeben und die Küvette wird vor dem Photowiderstand platziert. Jetzt gilt es, die höhenverstellbare Küvettenhalterung so einzustellen, dass wiederum kein Stromfluss verzeichnet wird. Ab jetzt wird eine halbe Stunde lang alle 30 Sekunden die Höhe der Küvettenhalterung abgelesen, die weiterhin verstellt wird, um dauerhaft die Zone des Gemisches zu betrachten, in der sich genau die Konzentration c/c_0 befindet. Nach Beendigung dieser Messung wird die Küvette vorsichtig aus der Halterung entnommen und für etwa eine Stunde beiseitegestellt.

Das gleiche Prozedere wird nun mit dem Graufilter der Stufe $c/c_0 = \frac{1}{32}$ wiederholt.

3.2 Konzentrationsprofil

Etwa zehn Minuten nach Beendigung der zweiten Messung wird jetzt das Konzentrationsprofil des Gemisches in der zweiten Küvette vermessen. Hierzu wird die Messbrücke mit Hilfe der Graufilter aller verfügbaren Stufen nacheinander geeicht und in der Küvette der Ort x bestimmt, an dem die jeweilige Konzentration vorliegt. Diese Messung wird auch für die erste Küvette wiederholt, nachdem das Gemisch insgesamt etwa 100 Minuten diffundieren konnte.

4 Auswertung

4.1 Qualitative Interpretation anhand von Diffusionskurven

Messung (1) und (2) werden bei stets konstanter Konzentration durchgeführt, wobei x immer größer wird. Man bewegt sich in Abb. 2 also auf einer Parallelen zur

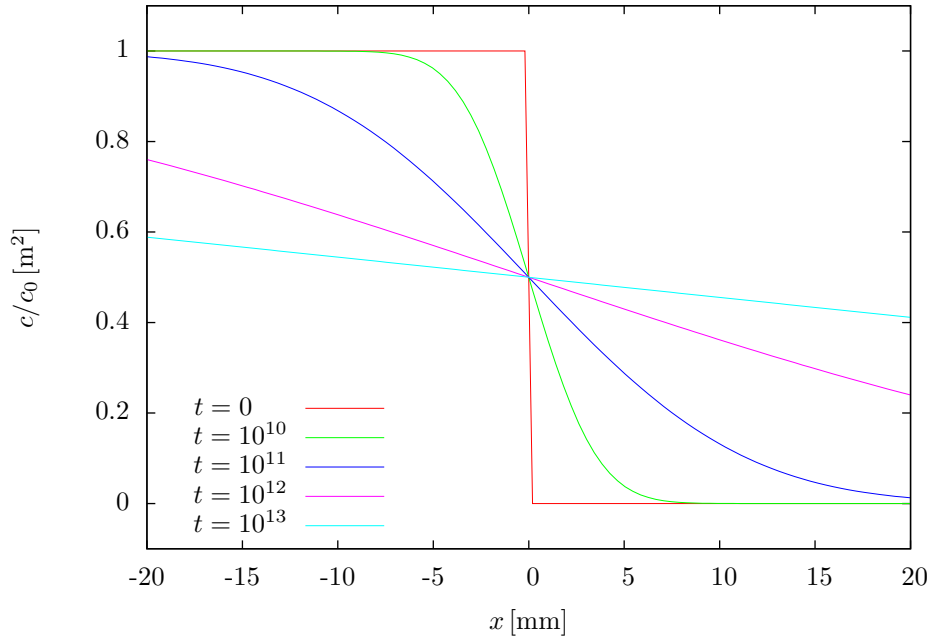


Abbildung 2: Lösung des 2. FICKSchen Gesetzes für die gegebenen Anfangsbedingungen bei verschiedenen Zeiten t .

x -Achse. Für Messung (3) und (4) wird eine näherungsweise konstante Zeit angenommen, hier bewegt man sich also jeweils auf einer den eingezeichneten Graphen ähnelnden Kurve zu festem Zeitpunkt $t \approx 40$ min bzw. $t \approx 100$ min

4.2 Ermittlung des Diffusionskoeffizienten

Zuerst werden die gemessenen Werte x_{mess} wie folgt umgerechnet:

$$x = \frac{x_{\text{mess}} - x_0}{1000},$$

wobei für x_0 jeweils der erste gemessene Wert zur Zeit $t = 0$ gewählt wurde. Hierdurch erhält man x in Metern und für $t = 0$ gilt $x = 0$.

Anschließend wird für beide Messungen das Quadrat der Diffusionsstrecke x^2 gegen die Zeit t aufgetragen (siehe Abb. 3) und eine lineare Regression¹ durchgeführt. Diese Regressionen liefern die Steigungen der jeweiligen Geraden m_1 und m_2 . Mit Hilfe von Gleichung (2) ergibt sich für den Diffusionskoeffizienten:

$$D_i = \frac{m_i}{\text{erf}^{-1}(7/8)}.$$

Hier bezeichnet erf^{-1} die inverse Gaußsche Errorfunktion. Nach einer numerischen

¹via gnuplot, $\chi_{\text{red},1}^2 = 1.00735 \cdot 10^{-13}$, $\chi_{\text{red},2}^2 = 1.46221 \cdot 10^{-13}$

Berechnung² von $\text{erf}^{-1}(\frac{7}{8}) \approx 1.084787$ erhält man:

$$\begin{aligned} D_1 &= (3.556 \pm 0.0010) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s} \\ D_2 &= (4.827 \pm 0.0014) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s} \\ \Rightarrow \bar{D} &= (4.192 \pm 0.0043) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

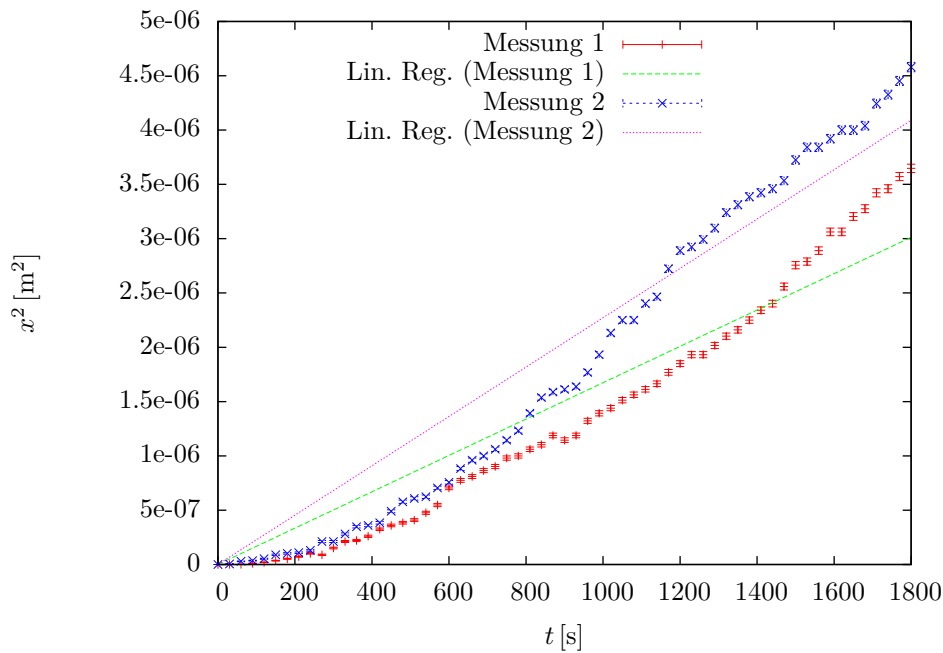


Abbildung 3: Lineare Regression zur Bestimmung des Diffusionskoeffizienten D .

4.3 Konzentrationsprofil

Mit dem experimentell bestimmten Wert für D lassen sich nun per Gleichung (2) theoretische Werte für c/c_0 ermitteln, die anschließend mit den gemessenen Werten verglichen werden (siehe Abb. 4, 5).

Es zeigt sich, dass die Messergebnisse bis auf wenige Ausnahmen³ erstaunlich gut mit den theoretisch ermittelten Werten zusammenfallen. Passend zu dieser Beobachtung ergibt sich der maximale Fehler durch die Annahme einer konstanten Zeit und realem Zeitunterschied $\Delta t \approx 5$ min bei mittlerem x zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{c,max} &= \frac{\Delta t}{s} \frac{\partial(c/c_0)}{\partial t} \\ &\approx 3.8 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Dieser Wert beeinflusst die gemessenen Werte von c/c_0 offensichtlich kaum.

²per WolframAlpha™

³Hier muss angemerkt werden, dass die Werte für $c/c_0 = 2$ und $c/c_0 = 4$ nicht richtig gemessen werden konnten, da die Messschraube nicht weit genug verstellbar war. Folglich sind diese Werte als hochgradig fehlerbehaftet anzusehen.

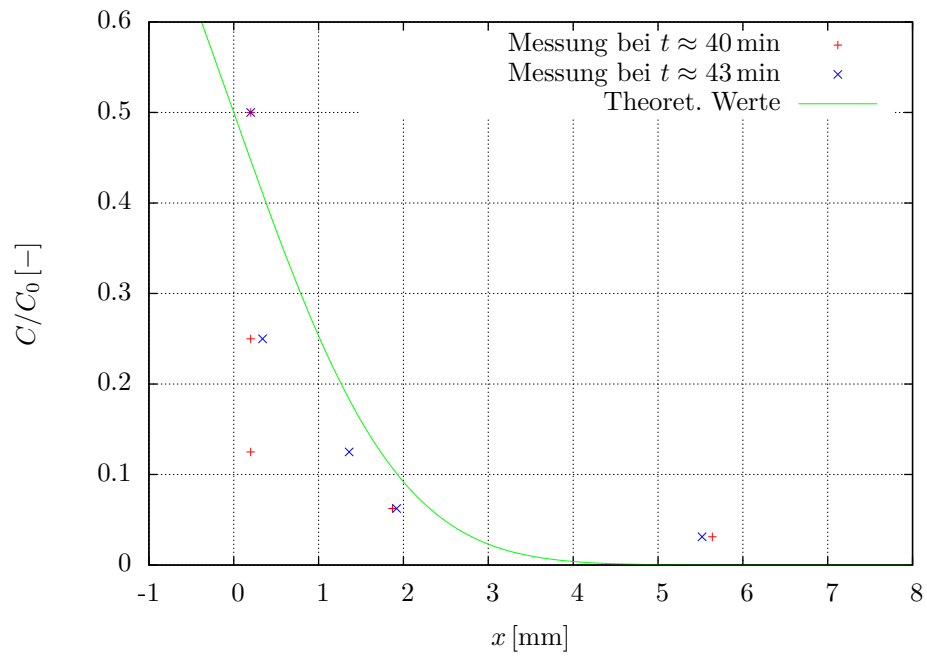


Abbildung 4: Konzentrationsprofil nach etwa 45 min.

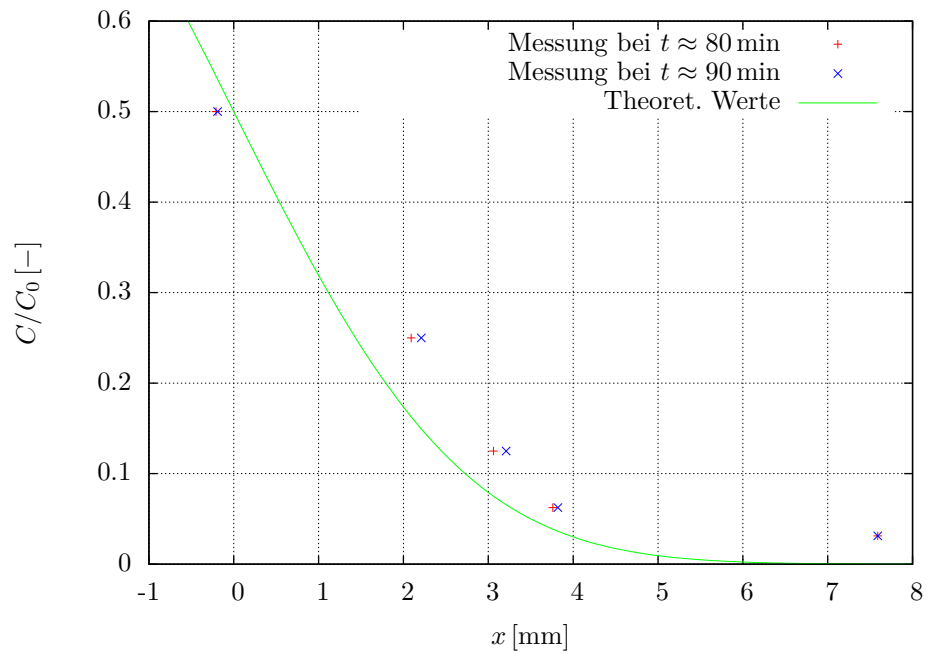


Abbildung 5: Konzentrationsprofil nach etwa 90 min.

5 Diskussion

5.1 Diffusionskoeffizient

Es fällt auf, dass der ermittelte Wert für den Diffusionskoeffizienten zwar nur eine geringe Abweichung vom Literaturwert aufweist, der berechnete Fehler aber scheinbar viel zu klein ist. Die relative Abweichung des Ergebnisses vom Literaturwert [1] beträgt 4.8 %, der relative Fehler des Ergebnisses liegt jedoch bei etwa 0.1 %.

Diese Diskrepanz entsteht wahrscheinlich nicht durch eine zu optimistische Einschätzung des Fehlers der gemessenen Größen, denn aufgrund des sehr langsam ablaufenden Diffusionsvorgangs fällt zunächst kaum ins Gewicht, dass der Fehler in der Zeit vernachlässigt wurde. Weiterhin ist die Einschätzung des Fehlers in der Höhe x mit $\sigma_x = 0.01$ mm zwar recht optimistisch, aber durchaus gerechtfertigt, da diese Größe einer Skaleneinheit entspricht und die Ablesegenauigkeit durchaus noch genauere Ergebnisse erlaubt hätte.

Ein potentiell zu dem abweichenden Ergebnis beitragender systematischer Fehler ist die bereits vor Beginn des Versuchs vorliegende Verschmutzung der Küvetten durch angetrocknetes Ethylenblau aus vorherigen Versuchsdurchführungen. Diese führt dazu, dass die gemessenen Werte stets eine Schicht mit geringerer Konzentration als der angenommenen widerspiegeln. So ergäbe sich beispielsweise für die erste Messreihe bei Annahme einer Konzentration von $c_0/15$ in der gemessenen Schicht ein Diffusionskoeffizient von $D = 4.004 \text{ m}^2/\text{s}$.

5.2 Konzentrationsprofil

Viele der hier gemessenen Werte waren nahezu unbrauchbar, da sie teilweise bei durch die Messbrücke fließenden Strömen gemessen werden mussten und so nur der kleinstmögliche Wert für die Höheneinstellung der Küvettenhalterung notiert wurde. Die übrigen Werte passen recht gut in das zu erwartende Schema, zeigen jedoch auch gewisse Abweichungen. Diese können wie oben durch die vorliegende Verschmutzung der Küvetten erklärt werden.

A Tabellen und Grafiken

t [s]	x [mm]	t [s]	x [mm]	t [s]	x [mm]	t [s]	x [mm]
0	3.85	450	4.45	900	4.92	1350	5.32
30	3.85	480	4.47	930	4.94	1380	5.35
60	3.88	510	4.49	960	5	1410	5.38
90	3.95	540	4.54	990	5.03	1440	5.4
120	3.99	570	4.59	1020	5.05	1470	5.45
150	4.04	600	4.69	1050	5.08	1500	5.51
180	4.08	630	4.73	1080	5.1	1530	5.52
210	4.12	660	4.75	1110	5.12	1560	5.55
240	4.17	690	4.78	1140	5.14	1590	5.6
270	4.15	720	4.8	1170	5.18	1620	5.6
300	4.24	750	4.84	1200	5.21	1650	5.64
330	4.31	780	4.85	1230	5.24	1680	5.66
360	4.32	810	4.88	1260	5.24	1710	5.7
390	4.36	840	4.9	1290	5.27	1740	5.71
420	4.42	870	4.94	1320	5.3	1770	5.74
						1800	5.76

Tabelle 1: Messwerte des Konzentrationsverlaufs mit $c_0/16$ -Graufilter

t [s]	x [mm]	t [s]	x [mm]	t [s]	x [mm]	t [s]	x [mm]
0	1.05	450	1.75	900	2.32	1350	2.87
30	1.12	480	1.81	930	2.33	1380	2.89
60	1.22	510	1.83	960	2.38	1410	2.9
90	1.24	540	1.84	990	2.44	1440	2.91
120	1.28	570	1.89	1020	2.51	1470	2.93
150	1.35	600	1.92	1050	2.55	1500	2.98
180	1.37	630	1.99	1080	2.55	1530	3.01
210	1.38	660	2.03	1110	2.6	1560	3.01
240	1.41	690	2.05	1140	2.62	1590	3.03
270	1.51	720	2.08	1170	2.7	1620	3.05
300	1.51	750	2.12	1200	2.75	1650	3.05
330	1.58	780	2.16	1230	2.76	1680	3.06
360	1.64	810	2.23	1260	2.78	1710	3.11
390	1.65	840	2.29	1290	2.81	1740	3.13
420	1.67	870	2.31	1320	2.85	1770	3.16
						1800	3.19

Tabelle 2: Messwerte des Konzentrationsverlaufs mit $c_0/32$ -Graufilter

x [mm]				
$c_0/2$	$c_0/4$	$c_0/8$	$c_0/16$	$c_0/32$
-0.57	-0.57	-0.57	1.10	4.87
$c_0/2$	$c_0/4$	$c_0/8$	$c_0/16$	$c_0/32$
-0.57	-0.43	0.59	1.15	4.75

Tabelle 3: Messwerte des Konzentrationsprofils nach etwa 45 min

x [mm]				
$c_0/2$	$c_0/4$	$c_0/8$	$c_0/16$	$c_0/32$
3.47	5.77	6.74	7.44	11.27
$c_0/2$	$c_0/4$	$c_0/8$	$c_0/16$	$c_0/32$
3.49	5.89	6.89	7.50	11.27

Tabelle 4: Messwerte des Konzentrationsprofils nach etwa 90 min

Literatur

- [1] GROSSE-KNETTER, Jörn ; SCHAAF, Peter: *Das Physikalische Praktikum : Handbuch 2012 für Studentinnen und Studenten der Physik*. Universitätsverlag Göttingen, 2012
- [2] MESCHÉDE, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Ausgabe. Springer, 2006
- [3] PRIOR, Mira ; SCHAAF, Peter: *LP - Diffusion*. – URL <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3665>. – Zugriffsdatum: 2012-06-02