Physikalisches A-Praktikum

Versuch 07

Der Adiabatenexponent c_p/c_V

Praktikanten:	Julius Strake	Betreuer:	Hendrik Schmidt
	Niklas Bölter	Durchgeführt:	15. 05. 2012
Gruppe:	17	Unterschrift:	

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Versuch soll der Adiabatenexponent $\kappa = c_p/c_V$ bestimmt werden. Dieser wird zuerst für die drei Gase Luft, Argon und Kohlenstoffdioxid mit der Methode nach Rüchardt, und danach noch einmal für Luft mit der Methode nach Clement-Desormes gemessen.

2 Theorie

2.1 Der Adiabatenexponent κ

Wenn einem Gas die Wärmemenge ΔQ zugeführt wird, gilt nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik:

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta W$$

Dabei ist ΔU die Änderung der inneren Energie des Gases, und ΔW die Arbeit, die das System verrichtet.

Bei konstantem Volumen gilt für 1 Mol eines Gases [2]:

$$\Delta Q = \Delta U = c_V \Delta T$$

Dabei ist ΔT die Temperaturänderung. Die Proportionalitätskonstante c_V wird *spezifische Wärmekapazität* bei konstantem Volumen genannt.

Falls bei der Erwärmung stattdessen der Druck konstant gehalten wird, dehnt sich das Gas aus. Nun muss zusätzlich eine Volumenarbeit geleistet werden [2]:

$$\Delta W = -p\mathrm{d}V = -pV\frac{\Delta T}{T} = -RT\frac{\Delta T}{T} = -R\Delta T$$

Zusammen ergibt sich also nach dem 1. Hauptsatz:

$$\Delta Q = c_V \Delta T + R\Delta T = (c_V + R)\Delta T = c_p \Delta T$$

Diese Proportionalitätskonstante wird ebenfalls *spezifische Wärmekapazität* genannt, diesmal bei konstantem Druck.

Das Verhältnis der beiden wird *Adiabatenexponent* $\kappa = c_p/c_V$ genannt, da für adiabatische Zustandsänderungen die Poisson-Gleichung gilt [2]:

$$pV^\kappa = \mathrm{const}$$

2.2 Methode nach Rüchardt

Im Versuch schwingt eine Kugel in einem nach oben offenen Rohr mit Durchmesser d und Querschnittsfläche $\pi/4\, d^2$, dabei drückt der äußere Luftdruck b die Kugel nach unten und der Druck p im Rohr in die entgegengesetzte Richtung. Die Kugel und die mit ihr im Rohr schwingende Luftsäule haben gemeinsam eine Masse von m, auf sie wirkt also die Gewichtskraft mg.

In der Gleichgewichtslage der Schwingung sind auch die Kräfte auf die Kugel im Gleichgewicht, es gilt also:

$$\frac{\pi}{4}\, d^2(p - b) = mg$$

Bei einer Auslenkung um Δx ändert sich der Gasdruck im Inneren um Δp. Dies bewirkt eine Rückstellkraft $F = \pi/4\, d^2 \Delta p$ zum Gleichgewichtspunkt hin. Differenzieren der POISSON-Gleichung nach dV ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(pV^{\kappa}\right) \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}V^{\kappa} + p\kappa V^{\kappa-1} \\ \mathrm{d}p &= -p\kappa\frac{\mathrm{d}V}{V} = -p\kappa\frac{\pi/4\ d^2\Delta x}{V} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Rückstellkraft ergibt:

$$F = m\ddot{x} = A\Delta p = \frac{-p\kappa\pi^2 d^4}{16V}\Delta x$$

Dies ist also ein *harmonischer Oszillator*, denn die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung. Also entsteht eine *Selbststeuerung* der Schwingung.

Die Schwingungsdauer T berechnet sich nun zu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{16mV}{p\kappa\pi^2 d^4}}.$$

Umstellen nach κ ergibt:

$$\kappa = \frac{64mV}{T^2 p d^4}. \tag{1}$$

2.3 Methode nach Clement-Desormes

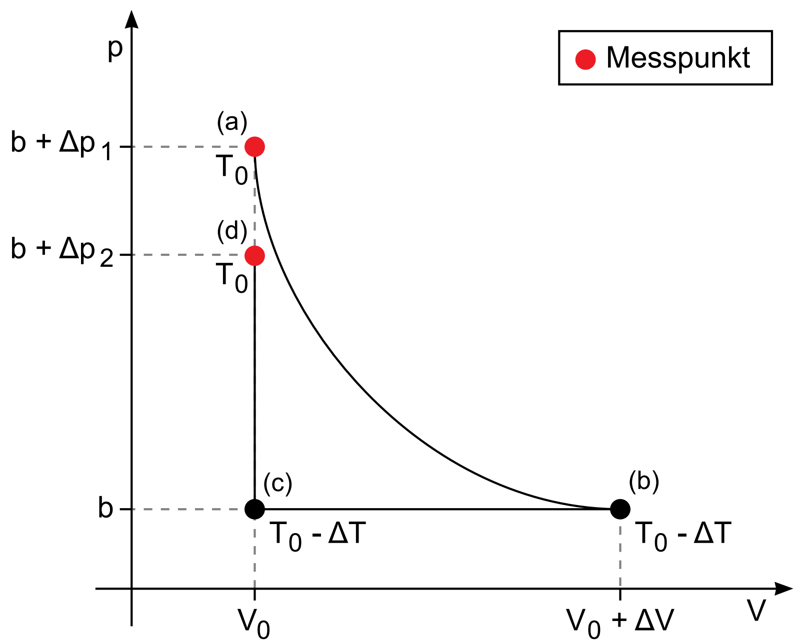

Abbildung 1: pV-Diagramm für Bestimmung von κ nach CLEMENT-DESORMES (Quelle: LP [3])

Bei dieser Methode wird der Adiabatenexponent über die Druckdifferenz der beiden Zustände (a) und (d) (Siehe Abb. 1) bestimmt.

Die Zustandsänderung von (a) nach (b) ist dabei die adiabatische Expansion des Gases bei Öffnung des Entlüftungsventil. Hier gilt also die POISSON-Gleichung. Bei diesem Vorgang kühlt sich das Gas ab.

Die Zustandsänderung von (c) nach (d) wiederum entspricht der Aufwärmung des Gases nach dem Schliessen des Ventils. Hierbei erhöht sich der Druck, das Volumen bleibt konstant. Es gilt also die *ideale Gasgleichung*.

Umstellen der beiden Gleichungen resultiert nun in [3]:

$$\kappa = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} \tag{2}$$

3 Durchführung

3.1 Messung nach Rüchardt

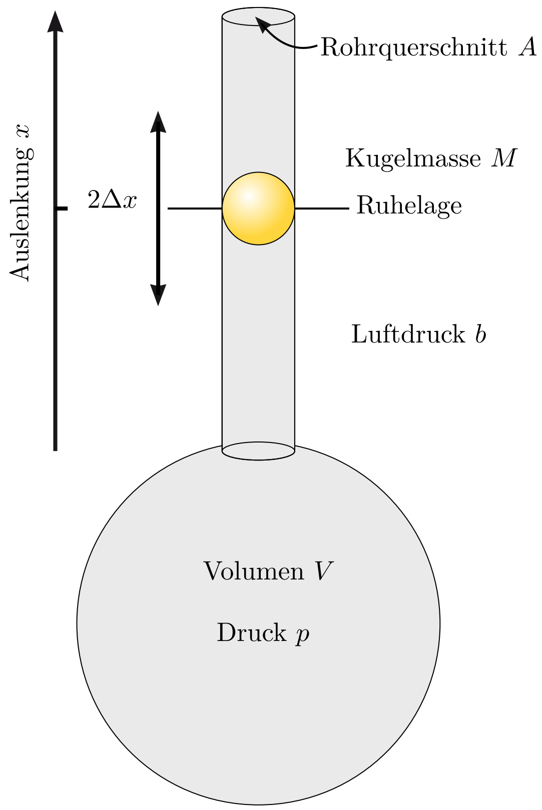

Abbildung 2: Versuchsaufbau für die Messung nach Rüchardt (Verändert nach LP [3]).

Bei diesem Versuch befindet sich in einem Glasrohr ein an dessen Seitenwände eng anliegender Schwingkörper. Dieses ist nach oben hin offen, von unten mit einem Glasbehälter verbunden und hat etwa auf der Hälfte einen kleinen Schlitz (Siehe Abb. 2). Durch eine Reihe von Ventilen kann der Behälter von Luft, Argon oder Kohlenstoffdioxid durchströmt werden.

Zuerst werden das Entlüftungs- und das Gasregulierventil am Glasbehälter aufgedreht, so dass das Gas im Behälter möglichst vollständig durch das Gas, dessen

Adiabatenexponent bestimmt werden soll, ersetzt wird. Nun wird das Entlüftungsventil geschlossen, und das Gasregulierventil so eingestellt, dass der Schwingkörper im Glasrohr möglichst symmetrisch um die Öffnung im Glasrohr schwingt. Jetzt wird mit der Stoppuhr die Gesamtdauer Δt einer Reihe von einer bis zu 100 Schwingungen mehrfach gemessen.

Nun wird die Messung mit den anderen Gasen wiederholt. Dafür wird wie am Anfang der Messung erst einmal das Entlüftungsventil geöffnet, um das Gas im Behälter möglichst vollständig durch das neue Gas austauschen zu können.

3.2 Messung nach Clement-Desormes

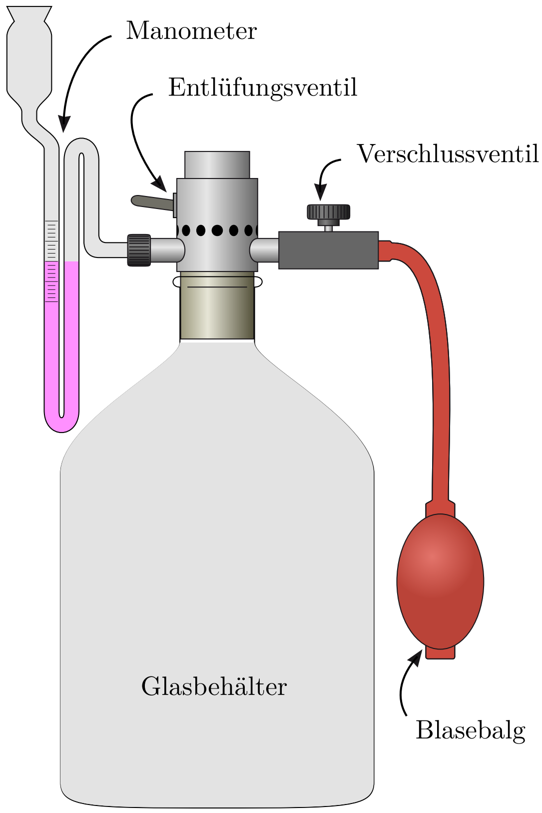

Abbildung 3: Versuchsaufbau für die Messung nach Clement-Desormes (Verändert nach LP [3]).

Bei diesem Versuch ist ein großer Glasbehälter mit einem Wassermanometer verbunden. Der Luftdruck im Inneren des Behälters lässt sich über einen Blasebalg erhöhen, und der Überdruck kann dann mit einem Entlüftungsventil wieder abgelassen werden (Siehe Abb. 3).

Zuerst wird der Druck mit dem Blasebalg erhöht, dabei erhöht sich die Temperatur im Inneren. Nach einem Temperaturausgleich mit der Umgebung wird der Überdruck Δh_1 am Manometer abgelesen. Danach wird das Entlüftungsventil für $t = 0.1, 1, 5\,\mathrm{s}$ geöffnet, und der neue Überdruck Δh_2 abgelesen.

Um auch den Gesamtdruck bestimmen zu können, wird danach noch der Luftdruck im Raum notiert.

Schwingungen	Luft	Argon	Kohlenstoffdioxid
1	1.38 ± 0.14	1.64 ± 0.18	1.30 ± 0.13
10	1.389 ± 0.025	1.643 ± 0.032	1.297 ± 0.023
20	1.3925 ± 0.013	1.649 ± 0.016	1.304 ± 0.012
50	1.3946 ± 0.0050	1.6475 ± 0.00634	1.3015 ± 0.0044
100	1.3983 ± 0.0025	1.6496 ± 0.0032	1.2999 ± 0.0023

Tabelle 1: Zwischenergebnisse für die Methode nach Rüchardt

4 Auswertung

4.1 Methode nach Rüchardt

Mit der Formel (1) berechnet sich der absolute Fehler nun folgendermaßen:

$$\sigma_\kappa = \frac{128 \cdot m \cdot V}{T^3 p d^4} \sigma_T.$$

Für die Messungen ergeben sich jetzt die Mittelwerte in Tab. 1. Dabei wurde der mittlere quadratische Fehler des Bestwertes als Fehlerabschätzung für σ_T benutzt.

Deren gewichtete Mittelwerte betragen:

$$\boxed{\begin{aligned} \kappa_{\text{Luft}} &= (1.397 \pm 0.003) \\ \kappa_{\text{Argon}} &= (1.649 \pm 0.003) \\ \kappa_{\text{CO}_2} &= (1.300 \pm 0.003) \end{aligned}}$$

Mit diesen Werten lassen sich nun auch die Freiheitsgrade der drei Gase berechnen. Genau wie im Versuch 06 gilt:

$$\frac{f}{2} = \frac{c_V}{R}$$

Mit $\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V}$, lässt sich die obere Gleichung nach f umstellen:

$$f = \frac{2c_V}{R} = \frac{2R}{R(\kappa - 1)} = \frac{2}{\kappa - 1}$$

Der absolute Fehler von f berechnet sich nun zu:

$$\sigma_f = \frac{2\sigma_\kappa}{(\kappa - 1)^2}$$

Damit ergeben sich die folgenden Freiheitsgrade:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{\text{Luft}} &= (5.04 \pm 0.04) \\ f_{\text{Argon}} &= (3.08 \pm 0.02) \\ f_{\text{CO}_2} &= (6.67 \pm 0.07) \end{aligned}}$$

4.2 Methode nach Clement-Desormes

Mit der Formel (2) und dem bekannten Zusammenhang $\Delta p = \rho g 2 \Delta h$ der Messgrößen ergibt sich nun:

$$\kappa = \frac{\Delta p1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} = \frac{2\rho g}{2\rho g} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2} = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2}.$$

Dabei ist ρ die Dichte des Öls im Ölmanometer, und g die Schwerebeschleunigung.

Also kann man folgenden absoluten Fehler abschätzen:

$$\sigma_\kappa = \sqrt{\left(\frac{\Delta h_2 \cdot \sigma_{\Delta h_1}}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_1 \cdot \sigma_{\Delta h_2}}{(\Delta h_1 - \Delta h_2)^2}\right)^2}.$$

Damit berechnet sich der *Adiabatenexponent* von Luft nun folgendermaßen:

$$\boxed{\begin{aligned} \kappa_{\Delta t=0.1\,\mathrm{s}} &= 1.403 \pm 0.014 \\ \kappa_{\Delta t=1.0\,\mathrm{s}} &= 1.328 \pm 0.012 \\ \kappa_{\Delta t=5.0\,\mathrm{s}} &= 1.256 \pm 0.010 \end{aligned}}$$

Dabei bezeichnet Δt die Öffnungszeit des Entlüftungsventils.

4.3 Adiabatenexponent von Luft

Da bei beiden Methoden der *Adiabatenexponent* von Luft bestimmt wurde, lässt sich nun ein gewichtetes Mittel berechnen. Dabei wurde nur der Wert für $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ verwendet, da die anderen Werte offenbar starke systematische Fehler aufweisen (Siehe Diskussion).

$$\boxed{\kappa = 1.3973 \pm 0.0030}$$

5 Diskussion

5.1 Methode nach Rüchardt

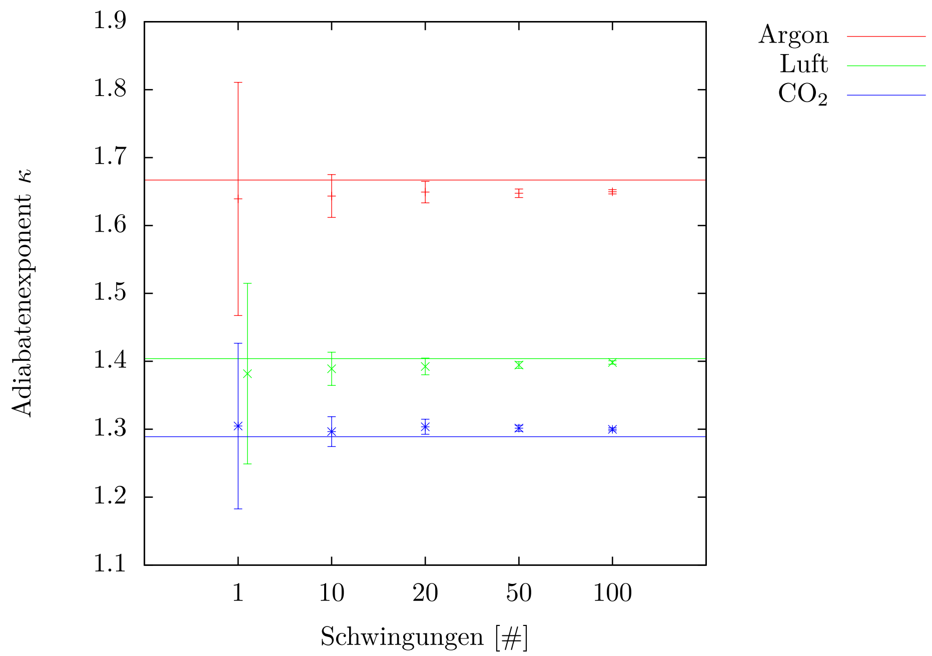

Abbildung 4: Vergleich der Ergebnisse für den Adiabatenexponenten nach Rüchardt mit Literaturwerten [1]

	Ergebnis	Literaturwert	Messfehler	Abweichung
Luft	1.397	1.404	0.16%	0.50%
Argon	1.649	1.667	0.17%	1.01%
CO_2	1.300	1.289	0.15%	0.85%

Tabelle 2: Abweichung von den Literaturwerten [1] für die Messung nach Rüchardt

Im Vergleich mit den Literaturwerten (Siehe Abb. 4 und Tab. 2) fällt auf, dass die Ergebnisse zwar sehr genau sind (Die größte Abweichung beträgt knapp 1%), aber die Messfehler offenbar viel zu klein berechnet wurden.

Erklären lässt sich dies damit, dass die einzige selbst gemessene Größe die Periodendauer der Schwingung ist. Da die Stoppuhr mit Lichtschranke aber sehr genaue Werte liefert, führt dies zu einem sehr kleinen Messfehler. Vor allem bei einer großen Anzahl an Schwingungen wird der Messfehler bezüglich einer einzelnen Periode natürlich sehr gering.

In die Formel zur Berechnung des *Adiabatenexponents* gehen aber auch der Durchmesser des Glasrohres d, die Masse des Schwingkörpers m und das Volumen des Gases im Glaskolben V ein. Diese wurden als exakt angenommen, da sie am Versuchsaufbau auslagen und nicht selbst gemessen wurden.

Freiheitsgrade Argon hat wenig überraschend drei Freiheitsgrade der Translation, als Edelgas ist es natürlich einatomig und damit existieren keine weiteren Freiheitsgrade.

Bei Luft handelt es sich hauptsächlich um zweiatomige Moleküle, die zusätzlich noch zwei Freiheitsgrade der Rotation haben. Hier sollte man also etwa 5 Freiheitsgrade erwarten, und genau das wurde auch gemessen.

Eigentlich sollte das gleiche auch für Kohlenstoffdioxid gelten, aber offenbar fangen hier die Moleküle schon bei Raumtemperatur an zu schwingen, so dass weitere Freiheitsgrade zur Verfügung stehen, um innere Energie zu speichern.

5.2 Methode nach Clement-Desormes

Für die kleinste Öffnungszeit $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ beträgt die Abweichung des gewichteten Mittelwerts vom Literaturwert weniger als 1 Promille. Dies ist aber wohl eher ein Zufall, da die einzelnen Zwischenergebnisse deutlich stärker streuen (Siehe Tab. 4).

Für die anderen Öffnungszeiten ist der berechnete Adiabatenexponent deutlich kleiner als erwartet (Siehe Abb. 5). Dies lässt sich leicht erklären, da bei längerer Öffnungszeit des Ventils die kalte Luft im Inneren mehr Zeit hat, um Wärme aus der Umgebung aufzunehmen. Da bei der Herleitung der Gleichung (2) aber angenommen wurde, dass die Expansion des Gases bis zur Schließung des Ventils adiabatisch erfolgt, bricht bei einer längeren Öffnungszeit diese Annahme immer mehr zusammen.

Im Extremfall hätte das Gas im Inneren schon vor Schließen des Ventils Raumtemperatur erreicht, es würde sich also keinerlei Überdruck mehr einstellen und die Formel (2) würde sich zu $\kappa = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1} = 1$ vereinfachen. Zu erwarten ist also, dass bei steigender Öffnungszeit der berechnete Adiabatenexponent immer stärker gegen 1 strebt, genau dies wurde auch gemessen.

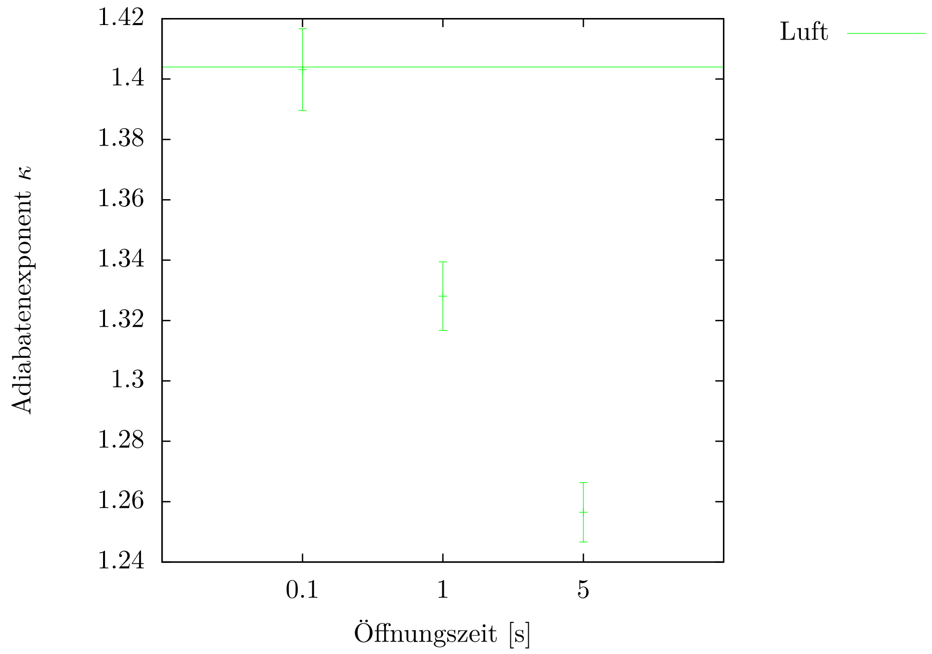

Abbildung 5: Vergleich der Ergebnisse für den Adiabatenexponenten nach CLEMENT-DESORMES mit Literaturwert [1]

A Tabellen und Grafiken

Luft	
Schwingungen	Periodenlänge [s]
1	0.658 ± 0.032
10	0.6558 ± 0.0058
20	0.6550 ± 0.0029
50	0.6545 ± 0.0012
100	0.65362 ± 0.00059
Argon	
Schwingungen	Periodenlänge [s]
1	0.604 ± 0.032
10	0.6029 ± 0.0058
20	0.6019 ± 0.0029
50	0.6022 ± 0.0012
100	0.60178 ± 0.00059
Kohlenstoffdioxid	
Schwingungen	Periodenlänge [s]
1	0.677 ± 0.032
10	0.6788 ± 0.0058
20	0.6769 ± 0.0029
50	0.6775 ± 0.0012
100	0.67790 ± 0.00059

Tabelle 3: Mittelwerte der Periodenlängen für die Messung nach RÜCHARDT

Δt	Δh_1	Δh_2	κ
0.1	40	13	1.481 ± 0.058
0.1	56	15	1.365 ± 0.035
0.1	67	20	1.425 ± 0.032
0.1	65	21	1.477 ± 0.036
0.1	69	20	1.408 ± 0.030
0.1	70	18	1.346 ± 0.027
1	56	15	1.365 ± 0.035
1	64	16	1.333 ± 0.029
1	67	17	1.340 ± 0.028
1	68	17	1.333 ± 0.027
1	68	16	1.307 ± 0.026
1	68	16	1.307 ± 0.026
5	64	13	1.254 ± 0.026
5	69	15	1.277 ± 0.025
5	65	14	1.274 ± 0.026
5	71	14	1.245 ± 0.023
5	68	14	1.259 ± 0.024
5	64	12	1.230 ± 0.025

Tabelle 4: Zwischenergebnisse für κ bei der Messung nach Clement-Desormes

Literatur

[1] Lide, David P. (Hrsg.): *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. 90. Ausgabe. CRC, 2010

[2] Meschede, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Ausgabe. Springer, 2006

[3] Schaaf, Peter: *LP - Der Adiabatenexponent*. – URL `https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3639`. – Zugriffsdatum: 2012-05-11