



Physikalisches A-Praktikum

Versuch 4

Kreiselpräzession

Protokollant:	Niklas Bölter	Betreuer:	Hendrik Schmidt
Mitpraktikant:	Julius Strake	Durchgeführt:	17. 07. 2012
Gruppe:	17	Unterschrift:	_____

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Drehmoment und Drehimpuls	4
2.2	Trägheitsmoment und Winkel	4
2.3	Der Kreisel	5
2.4	Nutation	5
2.5	Präzession	6
3	Durchführung	6
4	Auswertung	7
4.1	Trägheitsmoment aus Geometrie	7
4.2	Trägheitsmoment aus Pendelschwingung	8
4.3	Trägheitsmoment aus Präzession	8
4.4	Vergleich der Trägheitsmomente	9
4.5	Nutation	9
5	Diskussion	10
A	Tabellen und Grafiken	12

1 Einleitung

Allgemeine Kreisel sind starre Körper, welche um eine Achse rotieren. Der Kreisel in diesem Versuch ist zusätzlich an einem Punkt befestigt, kann aber in allen drei Raumrichtungen rotieren. Er eignet sich also hervorragend für die Untersuchung von *Drehmoment* und *Drehimpuls*, denn die Kreuzprodukte in den Definitionen dieser physikalischen Größen zeigen auf, dass Kräfte und Geschwindigkeiten, welche senkrecht zu der Kreiselachse liegen, eine wichtige Rolle spielen.

Beim Versuch werden also *Präzession* und *Nutation* des Kreisels untersucht.

2 Theorie

2.1 Drehmoment und Drehimpuls

Bewegt sich ein Körper mit Ortsvektor \mathbf{r} auf einer Trajektorie an einem Punkt \mathbf{x} vorbei, so ergibt sich aus seinem Impuls \mathbf{p} und dem Ortsvektor $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{x}$ des Körpers bezüglich des Punkts \mathbf{x} der *Drehimpuls* \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}' \times \mathbf{p}.$$

Ein konstanter Drehimpuls bedeutet also, dass sich der Körper in einer festen Ebene durch den Punkt \mathbf{x} bewegt, welche zum Drehimpuls orthogonal ist. Ein Spezialfall ist die gleichförmige Kreisbewegung um \mathbf{x} , bei der auch die Beträge von \mathbf{p} und \mathbf{r}' konstant sind. (Meschede, 2006, S. 27)

Ändert sich der Drehimpuls jedoch mit der Zeit, so wirkt ein *Drehmoment* \mathbf{T} auf den Körper, dieses ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{L}}$$

2.2 Trägheitsmoment und Winkel

Äquivalent zur trägen Masse bei der Translation lässt sich bei Rotationsbewegungen das *Trägheitsmoment* J definieren. Rotiert ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um \mathbf{x} , so definiert man:

$$\mathbf{L} = J\omega$$

Die Trägheitsmomente von Körpern bezüglich einer Drehachse lassen sich durch Integration bestimmen: (Meschede, 2006, S. 74)

$$J = \int_V r^2 \rho dV \quad (1)$$

Dabei bezeichnet r den Abstand vom betrachteten Volumenelement zur Rotationsachse und ρ die Dichte des Volumenelementes.

Für einen Zylinder, der um eine Achse parallel zu seiner zweizähligen Symmetrieachse rotiert, ergibt sich nun zusammen mit dem *Satz von Steiner* (Vergl. Versuch 3 „Trägheitsmoment“):

$$\begin{aligned}
 J_{\text{Zylinder}} &= \int_0^r \int_0^l \int_0^{2\pi} \rho(z^2 + (r' \sin(\varphi))^2) \cdot r' d\varphi dz dr' + \underbrace{md^2}_{\text{Satz von Steiner}} \\
 &= \underbrace{\rho\pi r^2}_m \left(\frac{1}{12} l^2 + \frac{1}{4} r^2 \right) + md^2 = m \left(\frac{1}{12} l^2 + \frac{1}{4} r^2 + d^2 \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Dabei ist l die Länge des Zylinders, r sein Radius und d der Abstand der beiden Achsen.

2.3 Der Kreisel

Ein symmetrischer *Kreisel* ist ein rotationssymmetrischer Körper, welcher nur an einem Punkt durch eine seiner Symmetrieachsen befestigt ist. Diese Symmetrieachse wird *Figurenachse* genannt. Wird der Kreisel an seinem Schwerpunkt S unterstützt, so wirkt keinerlei äußeres Drehmoment auf ihn, und er wird als *momentenfreier Kreisel* bezeichnet (Meschede, 2006, S. 88). Bei einer gleichförmigen Rotation um die Figurenachse bleibt der Kreisel natürlich durch die Rotationssymmetrie momentenfrei.

2.4 Nutation

Wirkt ein Drehmoment auf den Kreisel, welches nicht mit der Figurenachse zusammenfällt, so stimmen danach die Drehimpulsachse und die Figurenachse nicht mehr überein, und die Figurenachse beginnt um die Impulsachse zu rotieren. Da beide natürlich weiterhin durch den festgehaltenen Punkt S verlaufen müssen, bewegt sich die Figurenachse insgesamt auf einem Kegel, dessen Spitze mit S zusammenfällt. Dieser Kegel wird *Nutationskegel* genannt, der gesamte Vorgang *Nutation* (Meschede, 2006, S. 89).

Die während der Nutation wirksamen Drehimpulse und Winkelgeschwindigkeiten lassen sich in eine Komponente parallel zur Figurenachse (L_F, ω_F), und in eine Komponente senkrecht dazu (L_\perp, ω_\perp) zerlegen. Für diese Achsen gelten im Allgemeinen verschiedene Trägheitsmomente:

$$L_F = J_F \omega_F \quad (3)$$

$$L_\perp = J_\perp \omega_\perp. \quad (4)$$

Die Figurenachse schliesst auf dem Nutationskegel einen Winkel von θ mit dem Drehimpuls (und damit ω_N) ein. (Abb. 1) Mit dem Öffnungswinkel 2θ des Nutationskegels gilt nun für die Nutationsfrequenz ω_N (Paus, 2007, S. 105):

$$\omega_\perp = |\omega_N| \sin(\theta). \quad (5)$$

Da aber L_F die Projektion von \mathbf{L} auf die Figurenachse ist, gilt außerdem:

$$L_F = |\mathbf{L}| \cos(\theta) \quad (6)$$

$$L_\perp = |\mathbf{L}| \sin(\theta). \quad (7)$$

Einsetzen ergibt nun:

$$|\omega_N| \stackrel{(5)}{=} \frac{\omega_\perp}{\sin(\theta)} \stackrel{(4)}{=} \frac{L_\perp}{J_\perp \sin(\theta)} \stackrel{(7)}{=} \frac{|\mathbf{L}|}{J_\perp} \stackrel{(6)}{=} \frac{L_F}{\cos(\theta) J_\perp} \stackrel{(3)}{=} \frac{J_F \omega_F}{\cos(\theta) J_\perp}. \quad (8)$$

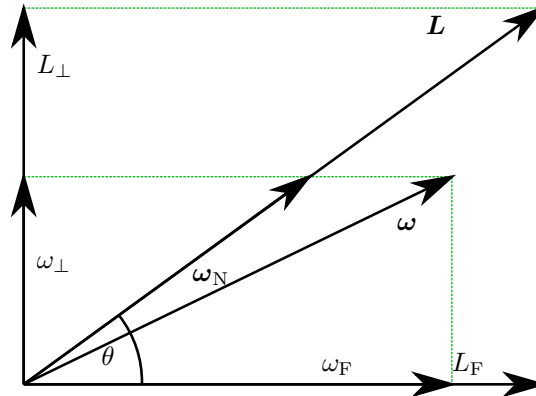


Abbildung 1: Nutationsfrequenz und Drehimpuls

2.5 Präzession

Versucht man, den Kreisel durch eine äußere Kraft \mathbf{F} senkrecht zur Drehachse zu schwenken, so ergibt sich ein kippendes Drehmoment $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, dabei ist r der Kraftarm von S zum Punkt, an dem die Kraft ansetzt. Dann steht aber \mathbf{T} immer orthogonal auf dem Drehimpuls \mathbf{L} , so dass der Drehimpuls, und damit die momentane Drehachse beginnt, um S zu rotieren. Dieser Vorgang wird Präzession genannt. (Meschede, 2006, S. 89)

Wird die Präzession durch die Schwerkraft verursacht, so gilt für die Frequenz, mit der die Präzessionsbewegung ausgeführt wird: (Meschede, 2006, S. 90)

$$\omega_p = \frac{mgr}{J_F \omega_F} \quad (9)$$

3 Durchführung

Zuerst wird die Geometrie des Kreisels und alle wichtigen Massen bestimmt (Siehe Abb. 2), danach wird das Zusatzgewicht (m_4) an das Rad geschraubt und die Achse fest eingespannt. Das Rad wird ausgelenkt und die Periode der Schwingung gemessen.

Nun wird die Einspannung entfernt, so dass sich der Kreisel frei drehen kann. Das Ausgleichsgewicht wird so befestigt, dass der Kreisel nun momentenfrei ist, und der Abstand zum Aufhängepunkt l_4 wird gemessen.

Mit einer Schnur wird der Kreisel in schnelle Rotation versetzt, und ein Zusatzgewicht eingehängt. Abwechselnd werden die Rotationsfrequenz des Rades mit einer Lichtschranke und die Präzessionsfrequenz für eine halbe Periode mit einer Stoppuhr bestimmt. Der gleiche Vorgang wird für zwei andere Zusatzgewichte wiederholt.

Anschließend wird der Kreisel wieder in schnelle Rotation versetzt, die Rotationsperiode gemessen und dann durch einen Stoß in Nutation versetzt. Die Nutationsperiode wird notiert, ebenso wird der Durchmesser des Kreisels, auf dem sich die Stangenspitze bewegt,

$$\begin{aligned} J_F &= (99.3 \pm 0.4) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \\ J_{\perp} &= (595 \pm 13) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2. \end{aligned}$$

4.2 Trägheitsmoment aus Pendelschwingung

Genau wie im Versuch 3 - „Trägheitsmoment“ wird nun aus der Periodendauer des physikalischen Pendels das Trägheitsmoment berechnet. Dabei muss das zusätzliche Trägheitsmoment des Zusatzgewichts natürlich abgezogen werden.

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_F + J_{\text{Zusatzgewicht}}}{gm_4 r_{\text{Rad}}}} \\ J_F &= \frac{gT^2 m_4 r_{\text{Rad}}}{4\pi^2} - m_4 r_{\text{Rad}}^2 \\ \sigma_{J_F} &= \sqrt{\left(\frac{gT m_4 r_{\text{Rad}}}{2\pi^2} \sigma_T\right)^2 + J_F \left(\frac{\sigma_{m_4}}{m_4}\right)^2 + \left(\frac{T^2 g m_4 \sigma_{r_{\text{Rad}}}}{4\pi^2} - 2m_4 r_{\text{Rad}} \sigma_{r_{\text{Rad}}}\right)^2} \end{aligned}$$

Mit dieser Methode ergibt sich nun:

$$J_F = (101 \pm 4) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

4.3 Trägheitsmoment aus Präzession

Auch aus der Präzessionsfrequenz kann das Trägheitsmoment bestimmt werden, denn Umstellen von Formel (9) liefert:

$$\begin{aligned} J_F &= \frac{gml_2}{\omega_F \omega_P} \\ \sigma_{J_F} &= \sqrt{\left(\frac{gm\sigma_{l_2}}{\omega_F \omega_P}\right)^2 + \left(\frac{g\sigma_m l_2}{\omega_F \omega_P}\right)^2 + \left(\frac{gml_2 \sigma_{\omega_F \omega_P}}{(\omega_F \omega_P)^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Also gilt insbesondere für ein festes m :

$$\frac{1}{\omega_F} \propto \omega_P$$

Die Präzessionsfrequenz sowie die reziproke Rotationsfrequenz des Rades sind für verschiedene Gewichte in den Abbildungen 5, 6 sowie 7 aufgetragen. Dabei wurde als Rotationsfrequenz der Mittelwert der vor bzw. nach dem Präzessionsvorgang gemessenen Frequenzen benutzt. Mit linearer Regression kann nun die Proportionalitätskonstante $\mu = \omega_F \omega_P$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \mu_{60 \text{ g}} &= (14.10 \pm 0.40) \\ \mu_{80 \text{ g}} &= (20.52 \pm 1.62) \\ \mu_{100 \text{ g}} &= (26.19 \pm 0.78) \end{aligned}$$

Für die einzelnen Gewichte ergeben sich nun folgende Werte:

$$\begin{aligned}
 J_{F,60\text{ g}} &= (111.9 \pm 3.6) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \\
 J_{F,80\text{ g}} &= (102.5 \pm 8.2) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \\
 J_{F,100\text{ g}} &= (100.4 \pm 3.3) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2
 \end{aligned}$$

4.4 Vergleich der Trägheitsmomente

Aus den oben bestimmten Trägheitsmomenten lässt sich nun ein gewichtetes Mittel bilden.

$$J_F = (103.0 \pm 1.7) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

Die verschiedenen Zwischenergebnisse und der Mittelwert wurden in Abb. 3 aufgetragen.

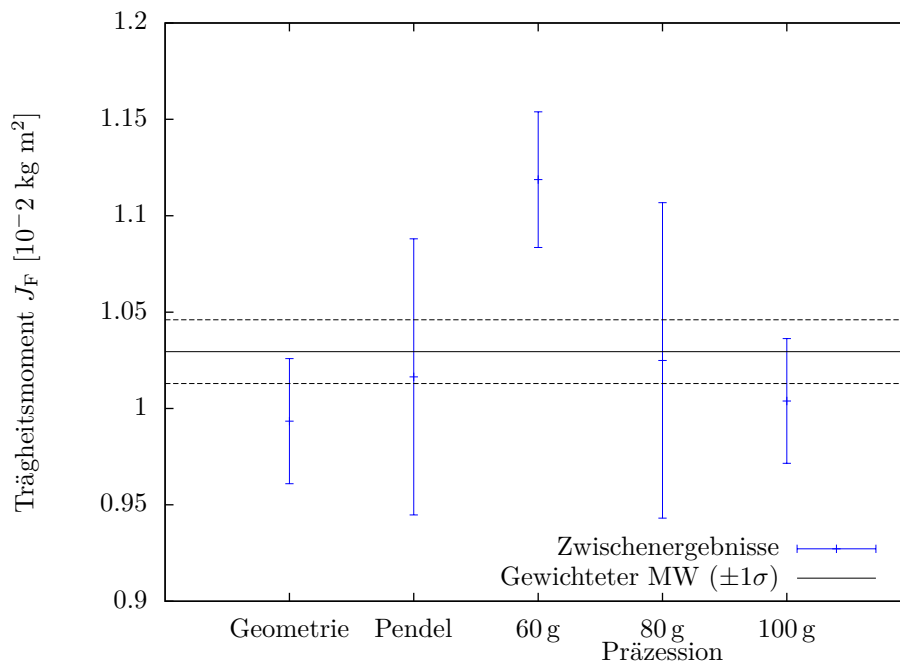


Abbildung 3: Vergleich der berechneten Trägheitsmomente

4.5 Nutation

Zunächst wird die Nutationsfrequenz ω_N gegen die Rotationsfrequenz ω_R aufgetragen (Abb. 4). Auch hier werden die Rotationsfrequenzen wie oben gemittelt. Es ist ein linearer Zusammenhang ersichtlich, mit einer entsprechenden Regression erhält man:

$$\frac{\omega_N}{\omega_F} = (0.155 \pm 0.003)$$

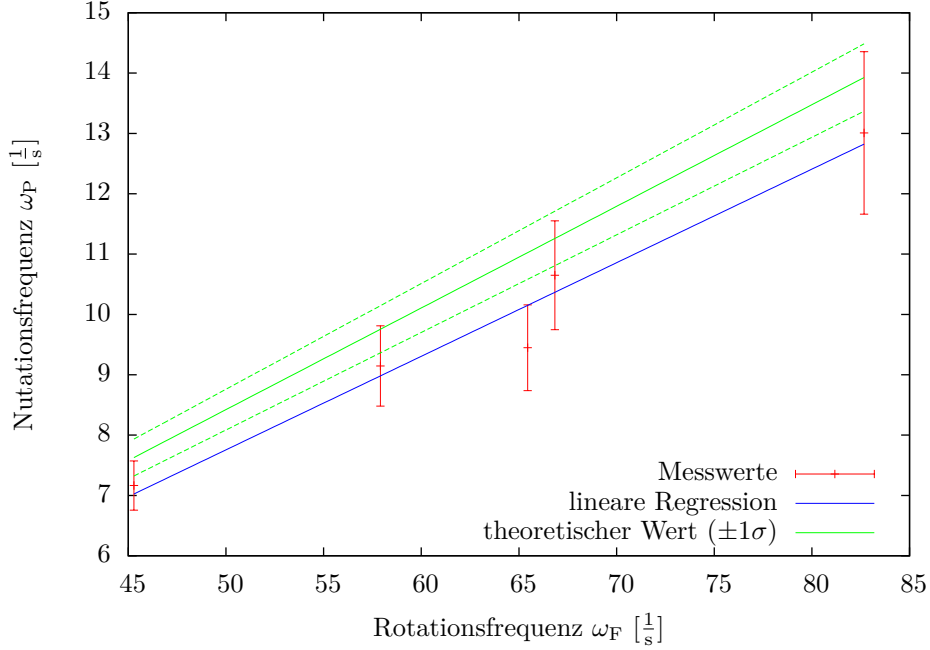


Abbildung 4: Zusammenhang zwischen Rotationsfrequenz und Nutationsfrequenz

Mit dem geschätzten Durchmesser d des Kreises, auf dem sich die Stangenspitze rotiert, kann nun der Öffnungswinkel des Nutationskegels bestimmt werden:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{d}{2l_7}\right) = (8 \pm 8)^\circ.$$

Zusammen mit der Formel (8) kann man jetzt auch den theoretischen Wert berechnen:

$$\frac{\omega_N}{\omega_F} = \frac{J_F}{\cos(\theta)J_\perp} = (0.168 \pm 0.008).$$

Dabei wurden für die Fehlerabschätzung benutzt:

$$\sigma_\theta = \sqrt{\left(\frac{d\sigma_{l_7}}{l_7}\right)^2 + \sigma_d^2 \left(2l_7\sqrt{1 - \frac{d^2}{4l_7^2}}\right)^{-1}}$$

$$\sigma_{\frac{\omega_N}{\omega_F}} = \sqrt{\left(\frac{J_F\sigma_{J_\perp}}{J_\perp}\right)^2 + \left(\frac{J_F \sin(\theta)\sigma_\theta}{\cos(\theta)}\right)^2 + \sigma_{J_F}^2 \frac{1}{J_\perp \cos(\theta)}}.$$

5 Diskussion

Beim Trägheitsmoment fällt auf (Siehe Abb. 3), dass die Messung der Präzession für ein Zusatzgewicht von 60 g deutlich (8.7%) vom Mittelwert abweicht. Da die Regression jedoch einen sehr guten linearen Zusammenhang mit $\chi_{\text{red}} = 0.3$ zeigt, scheint die Messung der Frequenzen jedoch nicht die Ursache gewesen zu sein. Da der Fehler beim kleinsten Gewicht auftrat, ist vielleicht das Drehmoment durch Reibung an der Aufhängung

signifikant reduziert worden. Auch war bei der ersten Messreihe das Zusammenspiel zwischen den Experimentatoren noch nicht so eingeübt. Mit einer effektiven Masse von 55 g gerechnet entspricht das Trägheitsmoment sehr genau den übrigen erhaltenen Werten.

Ansonsten sind die Ergebnisse sehr zufriedenstellend.

Beim Trägheitsmoment senkrecht zur Figurenachse J_{\perp} wurden sehr viele unterschiedliche Längen gemessen. Auch konnte die Masse des Stabes nicht direkt bestimmt werden, da der Stab sich nicht aus dem Kreisel entfernen lässt. Stattdessen wurde ein sehr ähnlicher Stab, der Teil des gleichen Experiments ist, gewogen, und die Masse dann aus dem Verhältnis der Längen geschätzt.

Wie erwartet weicht also die Vorhersage der Nutationsfrequenz mit 8.6% deutlich von der gemessenen Frequenz ab. Eine qualitative Aussage ist aber ganz deutlich (Vergleiche Abb. 4) zu sehen.

A Tabellen und Grafiken

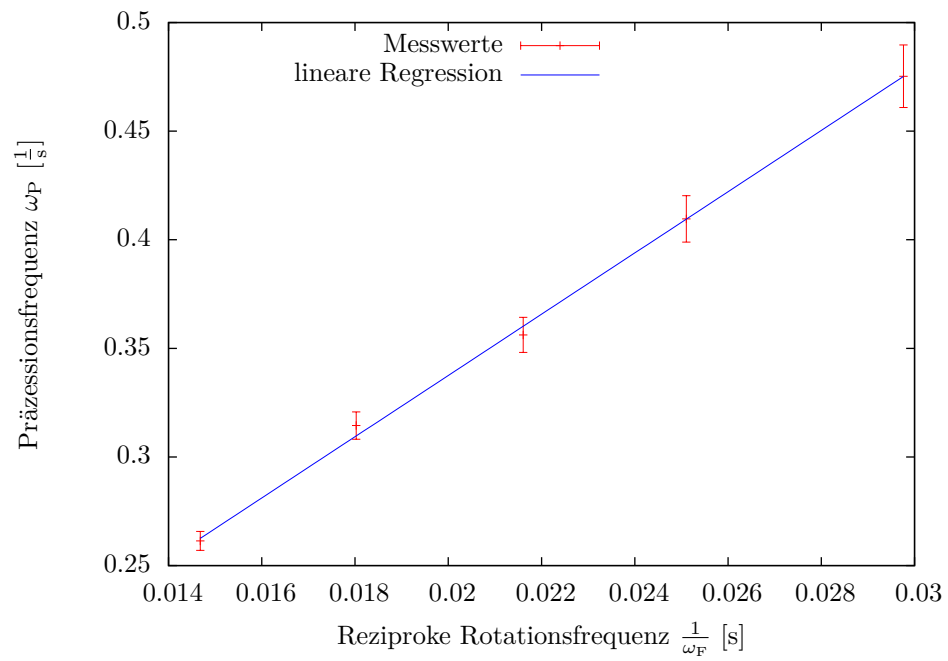


Abbildung 5: Zusammenhang von Präzessionsfrequenz und Rotationsfrequenz für 60 g Zusatzgewicht

$$\begin{aligned}
J_{\text{Scheibe}} &= m_{\text{Rad}} \left(\frac{1}{12} l_6^2 + \frac{1}{4} r_{\text{Rad}}^2 + \left(l_5 + \frac{1}{2} l_6 \right)^2 \right) \\
\sigma_{J_{\text{Scheibe}}}^2 &= \left(\left(\frac{1}{12} l_6^2 + \frac{1}{4} r_{\text{Rad}}^2 + \left(l_5 + \frac{1}{2} l_6 \right)^2 \right) \sigma_{m_{\text{Rad}}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} r_{\text{Rad}} m_{\text{Rad}} \sigma_{r_{\text{Rad}}} \right)^2 \\
&\quad + \left(m_{\text{Rad}} \left(\frac{1}{6} l_6 + \left(l_5 + \frac{1}{2} l_6 \right) \right) \sigma_{l_6} \right)^2 + \left(m_{\text{Rad}} \left(2 \left(l_5 + \frac{1}{2} l_6 \right) \right) \sigma_{l_5} \right)^2 \\
J_{\text{Stange}} &= m_2 \left(\frac{1}{12} l_1^2 + \frac{1}{4} r_3^2 + \left(\frac{1}{2} l_1 - l_7 \right)^2 \right) \\
\sigma_{J_{\text{Stange}}}^2 &= \left(\left(\frac{1}{12} l_1^2 + \frac{1}{4} r_3^2 + \left(\frac{1}{2} l_1 - l_7 \right)^2 \right) \sigma_{m_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} r_3 m_2 \sigma_{r_3} \right)^2 \\
&\quad + \left(m_2 \left(\frac{1}{6} l_1 + \left(\frac{1}{2} l_1 - l_7 \right) \right) \sigma_{l_1} \right)^2 + \left(m_2 \left(-2 \left(\frac{1}{2} l_1 - l_7 \right) \right) \sigma_{l_7} \right)^2 \\
J_{\text{Gegengewicht}} &= m_3 \left(\frac{1}{12} l_3^2 + \frac{1}{4} r_1^2 + \left(l_4 + \frac{1}{2} l_3 \right)^2 \right) \\
\sigma_{J_{\text{Gegengewicht}}}^2 &= \left(\left(\frac{1}{12} l_3^2 + \frac{1}{4} r_1^2 + \left(l_4 + \frac{1}{2} l_3 \right)^2 \right) \sigma_{m_3} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} r_1 m_3 \sigma_{r_1} \right)^2 \\
&\quad + \left(m_3 \left(\frac{1}{6} l_3 + \left(l_4 + \frac{1}{2} l_3 \right) \right) \sigma_{l_3} \right)^2 + \left(m_3 \left(2 \left(l_4 + \frac{1}{2} l_3 \right) \right) \sigma_{l_4} \right)^2
\end{aligned}$$

Anhang 1: Formeln zur Berechnung des Trägheitsmoments

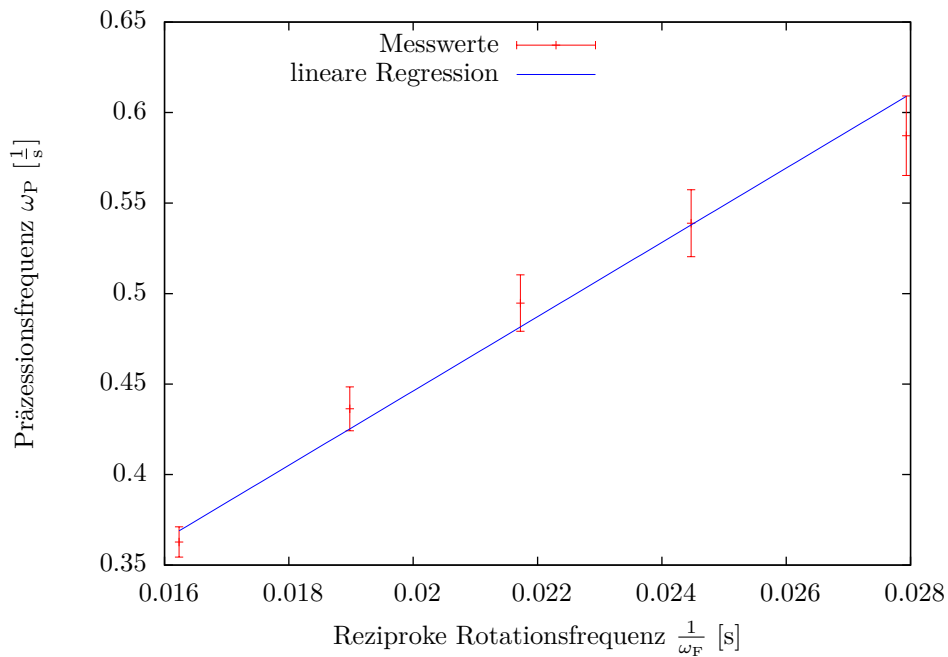


Abbildung 6: Zusammenhang von Präzessionsfrequenz und Rotationsfrequenz für 80 g Zusatzgewicht

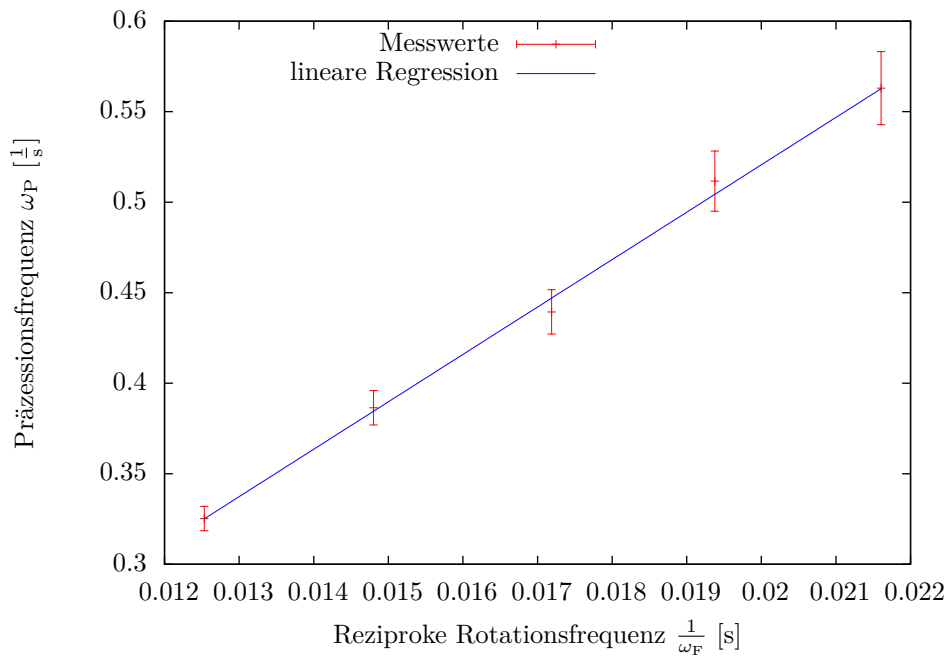


Abbildung 7: Zusammenhang von Präzessionsfrequenz und Rotationsfrequenz für 100 g Zusatzgewicht

Literatur

- [Meschede 2006] MESCHEDÉ, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Ausgabe. Springer, 2006
- [Paus 2007] PAUS, Hans J.: *Physik in Experimenten und Beispielen*. 3. Ausgabe. Hanser, 2007
- [Prior und Grosse-Knetter] PRIOR, Mira ; GROSSE-KNETTER, Jörn: *LP - Kreiselprä-
zession*. – URL <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3637>. – Zugriffsdatum:
2012-07-12