



Physikalisches A-Praktikum

Versuch 3

Das Trägheitsmoment

Praktikanten:	Julius Strake	Betreuer:	Hendrik Schmidt
	Niklas Bölter	Durchgeführt:	10.07.2012
Gruppe:	17	Unterschrift:	_____

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Trägheitsmoment und Winkel	4
3	Durchführung	5
3.1	Drehschwingungen	5
3.2	Winkelbeschleunigung	6
4	Auswertung	7
4.1	Drehschwingungen	7
4.2	Winkelbeschleunigung	8
5	Diskussion	8
A	Tabellen und Grafiken	10

1 Einleitung

Äquivalent zur trägen Masse bei Translation „widersetzt“ sich bei Rotation das Trägheitsmoment der Winkelbeschleunigung. Zur Messung des Trägheitsmomentes werden die Periodendauern der Schwingungen verschiedener Objekte bei Drehbewegung um bestimmte Achsen gemessen.

2 Theorie

2.1 Trägheitsmoment und Winkel

Rotiert ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um \mathbf{x} , so definiert man das Verhältnis aus seinem Drehimpuls \mathbf{L} und ω als *Trägheitsmoment* J :

$$\mathbf{L} = J\omega$$

Die Trägheitsmomente von Körpern bezüglich einer Drehachse durch den Schwerpunkt lassen sich durch Integration bestimmen: (Meschede, 2006, S. 74)

$$J = \int_V r^2 \rho dV \quad (1)$$

Dabei bezeichnet r den Abstand vom betrachteten Volumenelement zur Rotationsachse und ρ die Dichte des Volumenelementes.

Falls der Körper jedoch um eine zu der obigen Achse parallelen Achse rotiert, so kann man das neue Trägheitsmoment mit dem *Satz von STEINER* berechnen:

$$J = J_S + mr^2 \quad (2)$$

Dabei bezeichnet J_S das Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch den Schwerpunkt, m die Masse des Körpers und r den Abstand der beiden Achsen.

Für die hier vorliegenden Körper ergeben sich folgende Trägheitsmomente (Demtröder, 2008):

Kugel mit Radius r

$$J_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5}mr^2 \quad (3)$$

Hohlzylinder mit Radien r_1, r_2

$$J_{\text{Hohlzylinder}} = \frac{1}{2}m(r_2^2 + r_1^2) \quad (4)$$

Würfel mit Kantenlänge a

$$J_{\text{Würfel}} = \frac{1}{6}ma^2 \quad (5)$$

Stab mit Länge l

$$J_{\text{Stab}} = \frac{1}{12}ml^2 \quad (6)$$

Bei diesem Versuch wird auch eine *Drehschwingung* zur Bestimmung des Trägheitsmoments benutzt. Wirkt ein Drehmoment T auf eine Spiralfeder, so gibt es genau

wie beim HOOKSchen Gesetz einen linearen Zusammenhang mit dem Auslenkwinkel φ (Meschede, 2006, S. 85):

$$T = -k\varphi \quad (7)$$

Die Proportionalitätskonstante k wird *Winkelrichtgröße* genannt.

Für die Periode T der *Drehschwingung* von einem an der Federachse befestigten Körper mit Trägheitsmoment J gilt (Meschede, 2006, S. 86):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}$$

$$J = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \quad (8)$$

3 Durchführung

3.1 Drehschwingungen

Zunächst müssen die Objekte vermessen und gewogen werden, deren Trägheitsmomente zu bestimmen sind.

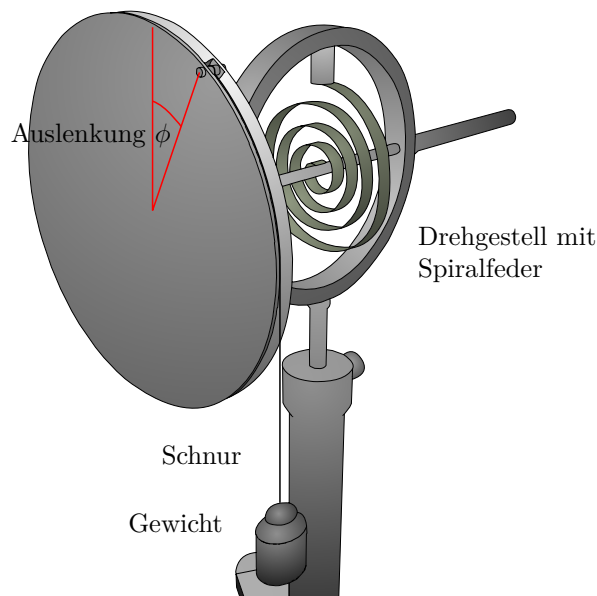


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus für die Drehschwingung (Verändert nach LP (Schaaf und Grosse-Knetter))

Anschließend wird zur Bestimmung der Winkelrichtgröße der Spiralfeder (siehe 1) eine Scheibe mit Winkelskala bei horizontal eingestellter Drehachse an der Achse befestigt. An der Scheibe befindet sich eine Schnur, mit deren Hilfe man eine stets tangential zum Rand der Scheibe wirkende Kraft erzeugen kann, indem dort verschiedene Gewichte befestigt werden. Für Massen von 10 g bis 60 g werden die so entstehenden Winkelausschläge der Scheibe gemessen.

Dann wird die Drehachse vertikal eingespannt und für alle zur Verfügung stehenden Objekte die Schwingungsdauer von 10 Perioden je drei mal gemessen. Beim Tisch-

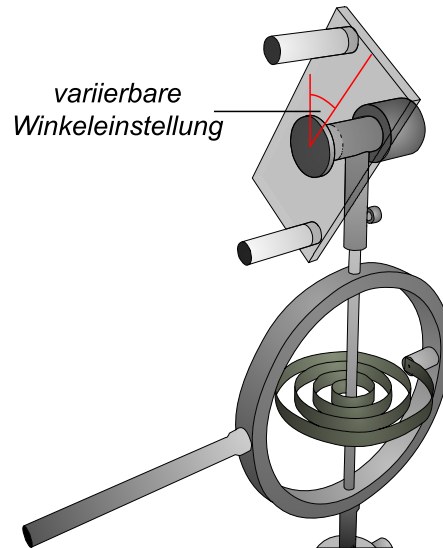


Abbildung 2: Messung der Schwingungsperiode für das Tischchen (Quelle: (Schaaf und Grosse-Knetter))

chen (siehe Abb. 2) wird eine Messung für jeden Winkel $\alpha \in \{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, \dots, 360^\circ\}$ durchgeführt.

3.2 Winkelbeschleunigung

Nun wird mit an einem Bindfaden befestigten Gewichten von 0.1 g bis 1 kg eine tangential zum Rad (siehe Abb. 3) angreifende Kraft erzeugt. Diese führt zu einer Winkelbeschleunigung parallel zur Achsenrichtung des Rades. Um jene zu messen, wird ein Streifen Registrierpapier um das Rad gelegt, auf dem ein Markengeber in Abständen von $\Delta t = 1$ s eine Markierung hinterlässt. Anschließend können dann mit einem Lineal die Abstände der Marken gemessen werden. Hierbei ist darauf zu achten, dass das Rad nicht mehr als einen Umlauf vollführt, da sonst eine Unterscheidung der Marken aus den verschiedenen Umläufen kaum möglich ist.

Durch die Befestigung eines Zusatzgewichtes an einer Speiche des Rades wird dieses zu einem physikalischen Pendel, dessen Schwingungsdauer nun über 10 Perioden zu messen ist. Diese Messung wird mit dem Zusatzgewicht an der gegenüberliegenden Speiche wiederholt.

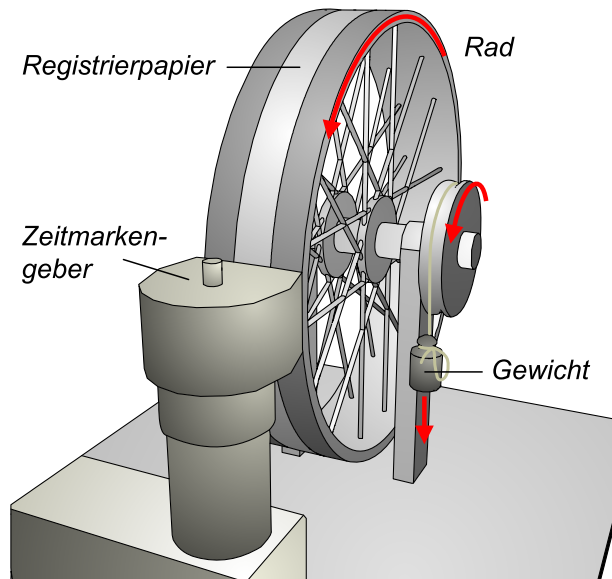


Abbildung 3: Skizze des Versuchsaufbaus zur Winkelbeschleunigung (Verändert nach LP (Schaaf und Grosse-Knetter))

4 Auswertung

4.1 Drehschwingungen

Zur Berechnung der Winkelrichtgröße wurde die Winkelauslenkung gegen das angreifende Drehmoment aufgetragen und durch lineare Regression¹ die Steigung bestimmt, welche nach Gleichung 7 der negativen Winkelrichtgröße entspricht. Es ergibt sich:

$$k = (2568 \pm 131) \text{ Nm}$$

Weiterhin werden von den Versuchskörpern jeweils einmal aus Form und Masse, sowie aus den gemessenen Periodendauern die Trägheitsmomente bestimmt. Aus Gestalt und Masse ergeben sich die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{Kugel}} &= (0.0351 \pm 0.0023) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Zylinder}} &= (0.0232 \pm 0.0007) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Scheibe}} &= (0.1312 \pm 0.0018) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Hohlzylinder}} &= (0.0417 \pm 0.0005) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Hantelkörper}} &= (0.4688 \pm 0.0947) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Würfel}} = J_{\text{Würfel, diagonal}} &= (0.0509 \pm 0.0007) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Stab}} &= (0.2146 \pm 0.0042) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Stab, verschoben}} &= (0.2805 \pm 0.0045) 10^{-2} \text{ kg m}^2
 \end{aligned}$$

¹via gnuplot, $\chi_{red}^2 =$

Aus der Messung der Schwingungsdauern lassen sich dann berechnen:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{Kugel}} &= (0.0357 \pm 0.0017) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Zylinder}} &= (0.0221 \pm 0.0011) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Scheibe}} &= (0.1169 \pm 0.0055) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Hohlzylinder}} &= (0.0481 \pm 0.0023) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Hantelkörper}} &= (0.4290 \pm 0.0199) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Würfel}} &= (0.0467 \pm 0.0023) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Würfel,diagonal}} &= (0.0461 \pm 0.0022) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Stab}} &= (0.2291 \pm 0.0107) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Stab,verschoben}} &= (0.3101 \pm 0.0144) 10^{-2} \text{ kg m}^2
 \end{aligned}$$

Nach graphischem Auftragen der Messwerte des Tischchens lassen sich die Hauptträgheitsmomente bestimmen:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{Tischchen,1}} &= (0.0297 \pm 0.0014) 10^{-2} \text{ kg m}^2 \\
 J_{\text{Tischchen,2}} &= (0.0466 \pm 0.0022) 10^{-2} \text{ kg m}^2
 \end{aligned}$$

4.2 Winkelbeschleunigung

Nach dem Auftragen der Zeitmarken gegen die Zeit und linearer Regression² konnte durch die Steigung γ der so entstandenen Geraden die Tangentialbeschleunigung a in der Entfernung R von der Achse bestimmt werden:

$$a = 2\gamma^2$$

Durch gewichtete Mittelung aus den vier Messungen konnte dann das Trägheitsmoment des Rades bestimmt werden:

$$\bar{\Theta} = (7.72 \pm 0.05) 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

Anschließend wurde aus der Pendelschwingung des Rades mit Zusatzgewicht erneut das Trägheitsmoment bestimmt. Man erhält mit den gemessenen Werten:

$$\bar{\Theta} = (6.58 \pm 0.27) 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

5 Diskussion

Offenbar weichen die aus den Drehschwingungen ermittelten Trägheitsmomente meist nicht allzu stark von den theoretisch aus der Geometrie ermittelten ab.

Die Messung des Hohlzylinders zeigt allerdings eine besonders starke Abweichung vom theoretisch ermittelten Wert. Jene weist auch die größte relative Abweichung vom geometrisch bestimmten Wert (mehr als 15 %) auf. Der Fehler liegt hier wahrscheinlich darin, dass die Masse der Halterung und Stabilisierung gänzlich dem äußeren Ring zugeschrieben wurde.

²via gnuplot, $\chi_{\text{red}}^2 = 0.0058$

Die bestimmten Trägheitsmomente des Tischchens genügen sehr gut der Vorhersage einer elliptischen Symmetrie. Für eine genauere Bestimmung der Hauptachsen wären jedoch mehr Messwerte hilfreich gewesen.

Bei der Messung des Trägheitsmomentes des Rades fällt auf, dass beide Werte zwar nahe beieinander liegen, sich ihre Fehlerintervalle aber nicht überschneiden. Ein möglicher Fehler wäre hier die ungenaue Messung des Abstandes des Zusatzgewichts von der Drehachse, sowie die Vernachlässigung der Reibung bei der Pendelschwingung.

A Tabellen und Grafiken

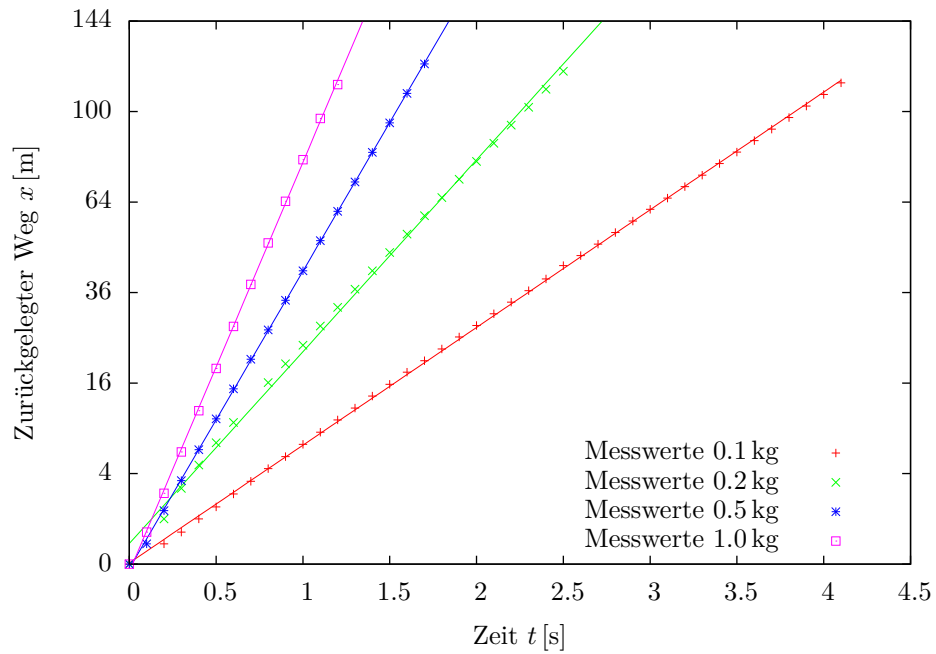


Abbildung 4: Zeitmarken zur Bestimmung der Winkelbeschleunigung

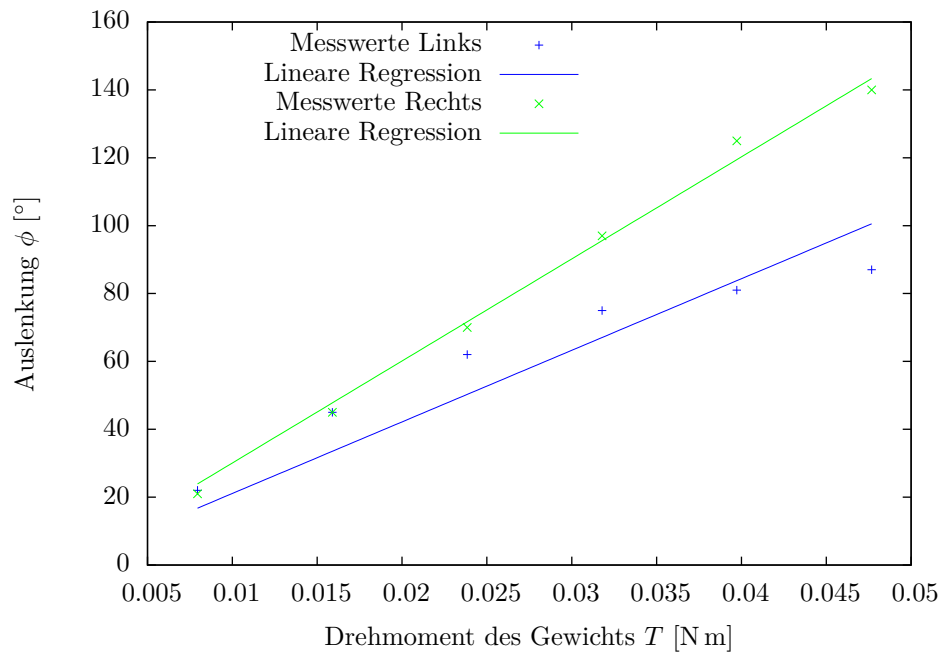


Abbildung 5: Zusammenhang zwischen Drehmoment und Winkelauslenkung

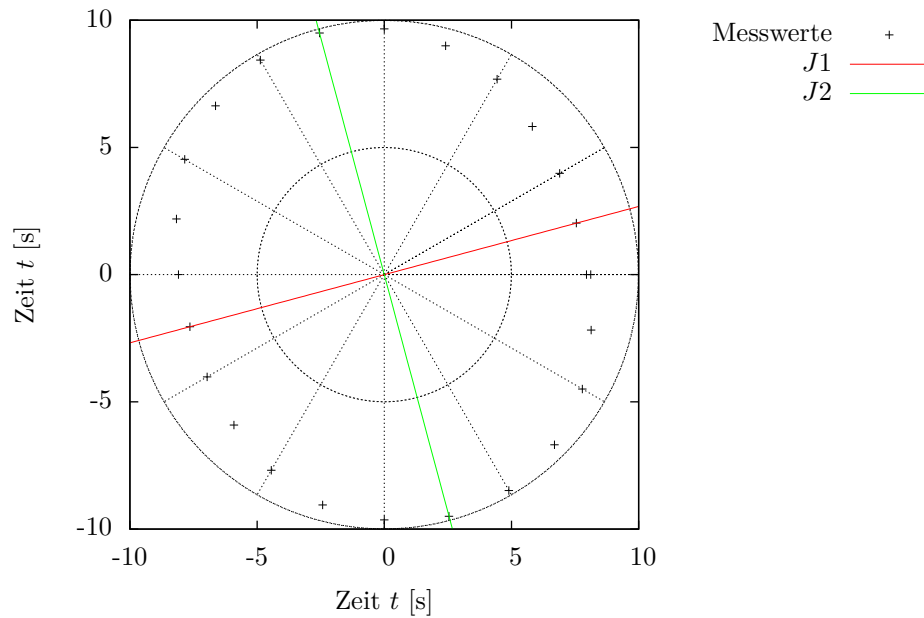


Abbildung 6: Periodendauern für die Rotation des Tischchens

Literatur

- [Demtröder 2008] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 1*. 5. Ausgabe. Springer, 2008
- [Meschede 2006] MESCHEDÉ, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Ausgabe. Springer, 2006
- [Schaaf und Grosse-Knetter] SCHAAF, Peter ; GROSSE-KNETTER, Jörn: *LP - Das Trägheitsmoment*. – URL <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3606>. – Zugriffsdatum: 2012-07-23