



Physikalisches A-Praktikum

## Versuch 2

# Die Gravitationswaage

Praktikanten:	Julius Strake	Betreuer:	Hendrik Schmidt
	Niklas Bölter	Durchgeführt:	03.07.2012
Gruppe:	17	Unterschrift:	_____



## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>8</b>
<b>A</b>	<b>Tabellen und Grafiken</b>	<b>9</b>

## 1 Einleitung

In diesem Versuch soll die Gravitationskonstante  $\gamma$  mit Hilfe der Gravitationswaage bestimmt werden. Diese wurde im neunzehnten Jahrhundert von CAVENDISH und EÖTVÖS entwickelt und bis heute gibt es kaum Experimente, die größere Genauigkeit bei ähnlichem Aufwand erlauben.

## 2 Theorie

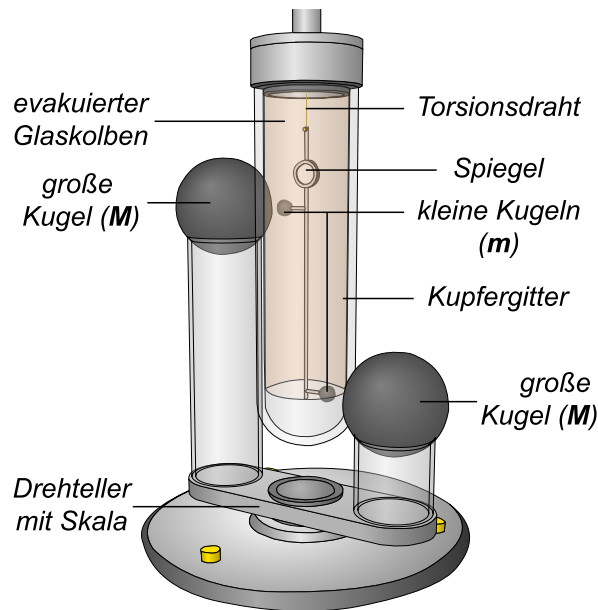


Abbildung 1: Skizze des Aufbaus der Gravitationswaage (Verändert nach LP [? ])

Das von ISAAC NEWTON formulierte Gravitationsgesetz für die Kraft zwischen zwei massebehafteten Körpern der Massen  $M$  und  $m$  mit vektoriellm Abstand  $\mathbf{r}$  lautet [3]:

$$\mathbf{F} = \gamma \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (1)$$

Die in diesem Versuch verwendete Gravitationswaage nach CAVENDISH und EÖTVÖS (siehe Abb. 1) besteht aus einem Torsionsfaden, an dem zwei kleine Metallkugeln und ein Spiegel angebracht sind. Dieser Teil des Aufbaus befindet sich in einem evakuierten Glasbehälter, der zusätzlich mit einem Kupfernetz vor statischen Aufladungen geschützt ist.

Ein auf den Spiegel gerichteter Laser erzeugt einen Lichtpunkt auf einer gut ablesbaren Skala. Außerhalb des Behälters befinden sich außerdem zwei große Eisenkugeln, die mit Hilfe eines Drehtellers um den Glasbehälter gedreht werden können, wobei der Winkel auf einer Winkelskala abzulesen ist.

In einer beliebigen Ruhelage müssen sich alle wirkenden Drehmomente ausgleichen, es entspricht also das Torsionsmoment des Fadens  $M_T$  dem wegen der Gravitationskraft zwischen den Kugeln wirkenden Drehmoment  $M_G$ . Für letzteres folgt mit Gleichung 1 für beide Kugelpaare zusammen:

$$M_G = 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} \sin \beta, \quad (2)$$

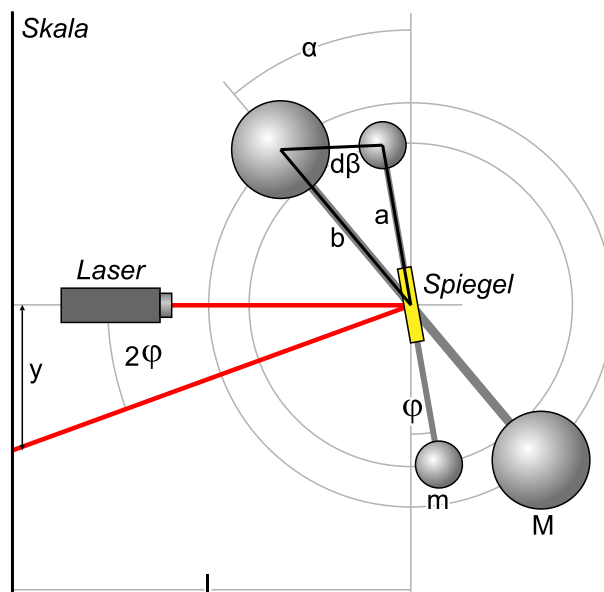


Abbildung 2: Schematischer Aufbau mit einigen wichtigen Größen (Verändert nach LP [? ])

wobei  $d$  den Abstand einer einer kleinen Kugel zur jeweils näherliegenden großen Kugel und  $a$  und  $\beta$  in Abbildung 2 definiert sind. Hat der Faden den Radius  $r_F$  und die Länge  $l_F$ , so ergibt sich für kleine  $\varphi$  [3]:

$$M_T = D\varphi = G \frac{\pi r_F^4}{2l_F} \varphi \quad (3)$$

mit dem materialabhängigen Torsionsmodul  $G$  und der Winkelrichtgröße  $D$ . Letztere kann über eine Messung der Periodendauer der Schwingung der Torsionshantel mit Trägheitsmoment  $\Theta$  bestimmt werden [1]:

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} \Theta \quad (4)$$

$$= \frac{4\pi^2}{T^2} 2m \left( \frac{2}{5} r^2 + a^2 \right). \quad (5)$$

Das Trägheitsmoment ergibt sich aus dem Trägheitsmoment einer Kugel mit Radius  $r$  und Masse  $m$  bei Rotation um die eigene Achse  $\Theta_{SP} = \frac{2}{5} m r^2$  und Anwendung des STEINERSchen Satzes bei Verschiebung der Drehachse um die Länge  $a$ :  $\Theta_a = m \left( \frac{2}{5} r^2 + a^2 \right)$ . Anschließend wird noch berücksichtigt, dass es sich bei der Torsionshantel um zwei Kugeln des Radius  $r$  im Abstand  $a$  handelt.

Gibt  $d$  den Abstand zwischen einer kleinen Kugel und der näherliegenden großen Kugel und  $\delta$  den gegenüberliegenden Winkel an, so ergibt sich aus dem Sinussatz:  $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \delta$ . Da die Auslenkung der Torsionshantel  $\varphi$  immer nur wenige Grad beträgt, lässt sich die Näherung  $\delta = \alpha - \varphi \approx \alpha$  verwenden. Für  $d$  folgt dann mit dem Cosinussatz  $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta$ , also insgesamt mit den Gleichungen 2, 3 und 5:

$$\gamma = 4\pi^2 \varphi \left( \frac{2}{5} r^2 + a^2 \right) \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}^3}{T^2 M a b \sin \alpha}. \quad (6)$$

### 3 Durchführung

Zunächst wird die Nullage der Drehwaage bestimmt, wobei sich alle vier Kugeln in einer Ebene befinden sollten.

Anschließend werden die großen Kugeln vorsichtig um den Winkel  $\alpha = 45^\circ$  ausgelenkt. Über mindestens fünf Perioden wird nun in Abständen von je 15 Sekunden die Auslenkung des Lichtzeigers  $y(t)$  bestimmt. Auch die Maximalausschläge werden notiert. Jetzt werden die großen Kugeln um den Winkel  $90^\circ$  zurückgedreht, sodass ein Winkel von  $\alpha = -45^\circ$  gegenüber der anfänglichen Position eingestellt ist. Die obige Messung wird nun wiederholt.

### 4 Auswertung

Zunächst werden aus den Extrema der Messwerte die neuen Ruhelagen der Torsionshantel  $\langle \bar{y}_1 \rangle$  für  $\alpha = 45^\circ$  und  $\langle \bar{y}_2 \rangle$  für  $\alpha = -45^\circ$  bestimmt. Hierfür wird für drei aufeinanderfolgende Extrema  $y_{1,i}$ ,  $y_{2,i}$ ,  $y_{3,i}$  die Formel  $\bar{y}_i = \frac{1}{4}(y_{1,i} + 2y_{2,i} + y_{3,i})$  verwendet. Anschließend wird  $\langle \bar{y}_i \rangle$  aus dem arithmetischen Mittel der so erhaltenen Werte bestimmt. Nach Abzug der ursprünglichen Ruhelage  $y_0 = 126.5 \text{ cm}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}\langle \bar{y}_1 \rangle &= (-12.56 \pm 0.05) \text{ cm} \\ \langle \bar{y}_2 \rangle &= (10.53 \pm 0.05) \text{ cm}\end{aligned}$$

Der Fehler ergibt sich hierbei aus dem fortgepflanzten Fehler der Messwerte, der mit  $\sigma_{Mess} = 0.25 \text{ cm}$  abgeschätzt wurde.

Nach dem Auftragen der Messwerte (siehe Abb. 3, 4) erhält man aus einer Regression<sup>1</sup> die Werte für die Periodendauer der Schwingungen für die beiden Messungen:

$$\begin{aligned}T_1 &= (548.0 \pm 0.3) \text{ s} \\ T_2 &= (539.9 \pm 0.2) \text{ s}\end{aligned}$$

Bezeichnet  $l$  den senkrechten Abstand des Spiegels am Torsionsfaden zur Messskala, so lässt sich nun aus Gleichung 6 mit  $\varphi = \frac{1}{2} \arctan(\langle \bar{y}_i \rangle / l)$  je ein Wert für  $\gamma$  bestimmen:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (5.90 \pm 0.62) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ \gamma_2 &= (6.83 \pm 0.61) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ \langle \gamma \rangle &= (6.37 \pm 0.44) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}\end{aligned}$$

Der Fehler des Mittelwerts ergibt sich aus den fortgepflanzten Fehlern in  $\gamma_i$ :

$$\sigma_{\gamma,i} = \gamma_i \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\varphi,i}}{\varphi_i}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_{T,i}}{T_i}\right)^2 + \left(\frac{2ab \sin \alpha}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \sigma_\alpha\right)^2}$$

Die Abweichung vom Literaturwert [2] beträgt somit etwa 4.5 %. Das Torsionsmodul des Fadens ergibt sich durch gleichsetzen des Torsionsmoments mit dem durch die Schwerkraft der großen Kugeln ausgeübten Drehmoment. Diese sind durch die Gleichungen 2 und 3 gegeben. Es folgt:

$$\begin{aligned}G \frac{\pi r_F^4}{2 l_F} \varphi &= \gamma \frac{2 a M m}{d^2} \sin \beta \\ \Rightarrow G &= \gamma \frac{4 a M m l_F}{d^2 \varphi \pi r_F^4} \sin \beta\end{aligned}$$

<sup>1</sup>via gnuplot,  $\chi_{red,1}^2 \approx \chi_{red,2}^2 \approx 0.65$ ; hierfür wurde eine Gleichung für den gedämpften Oszillator zu einer Geradengleichung addiert.

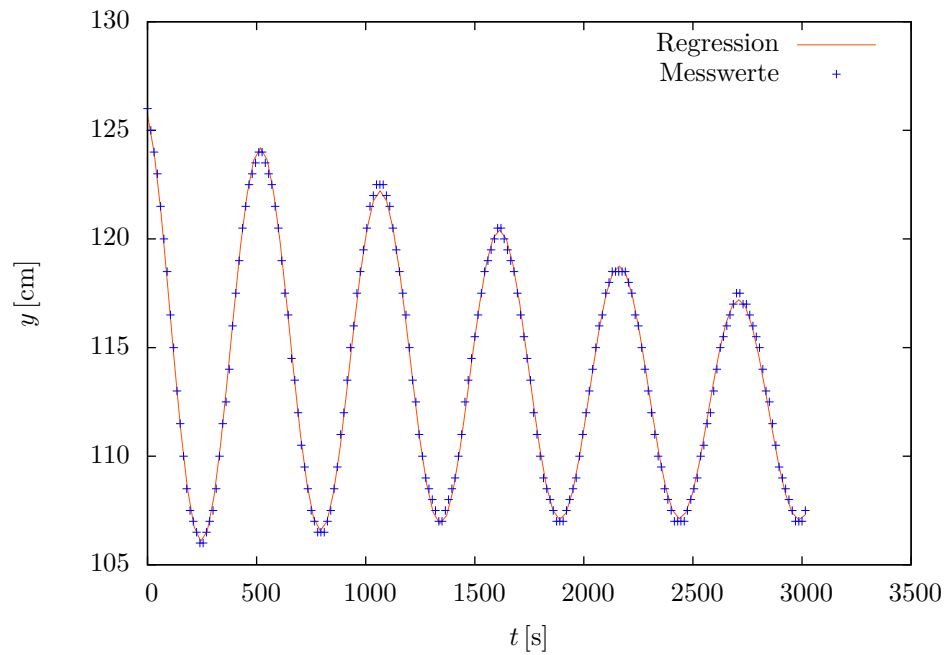


Abbildung 3: Messwerte der ersten Messreihe bei  $\alpha = 45^\circ$ .

Wie oben folgt  $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$  mit  $\sin \beta = \frac{b}{d} \sin \delta$  und  $\delta \approx \alpha$ . Insgesamt ergibt sich dann unter Verwendung von  $\varphi = \frac{1}{2} \arctan(\langle \bar{y}_i \rangle / l)$  das Torsionsmodul zu:

$$G = \gamma \frac{4 l_F a b M m \sin \alpha}{\pi r_F^4 \varphi \sqrt{a^2 + b^2 - 2 a b \cos \alpha}^3}$$

Es folgt dann schließlich mit dem Literaturwert für die Gravitationskonstante  $\gamma_{Lit} = 6.67384 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  das Torsionsmodul des Fadens:

$$G = (1.53 \pm 0.05) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

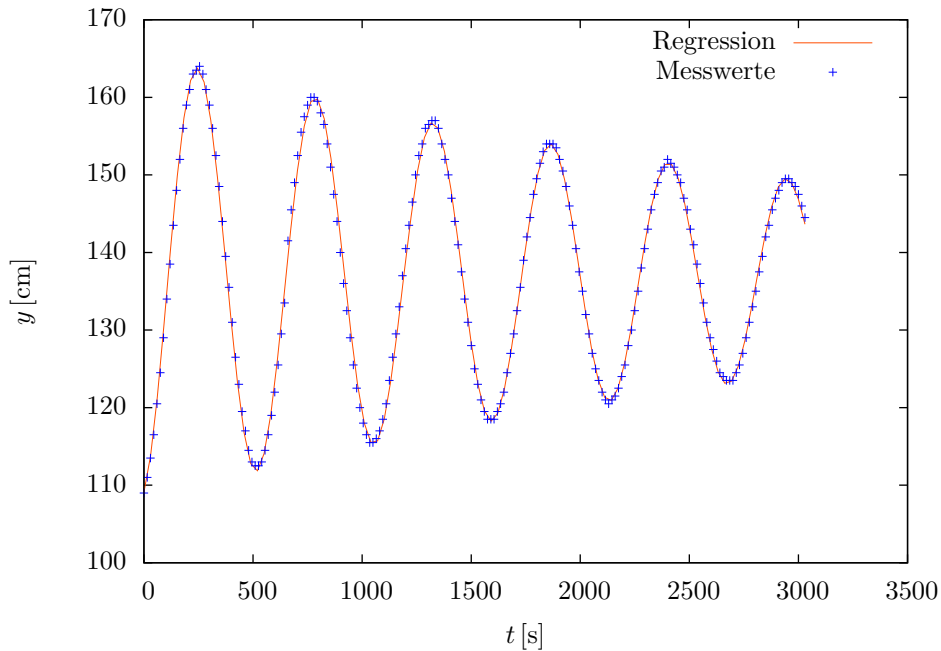


Abbildung 4: Messwerte der zweiten Messreihe bei  $\alpha = -45^\circ$ .

## 5 Diskussion

Zunächst ist zu bemerken, mit welchem geringem Messaufwand das Ergebnis zu erzielen war. Verglichen mit anderen Messvarianten scheint die Gravitationswaage also eine sehr simple, aber trotzdem recht genaue Messung zu erlauben.

Es fällt jedoch auf, dass bei der ersten Messung die neue Ruhelage in Richtung der ursprünglichen Nulllage zu driften scheint. Eine Erklärung hierfür wäre, dass der Faden möglicherweise vor Beginn des Versuchs eine Torsion aufwies. Man kann annehmen, dass eine weitere Torsion des Fadens in die Richtung der bereits vorhandenen Verdrillung auch zu plastischen Verformungen führt, die dann die gemessenen Nichtlinearitäten hervorrufen. Dafür spricht auch, dass die Messungen bei Torsion in die andere Richtung den Erwartungen entsprachen, der Faden also wieder ein lineares Verhalten aufwies. Die Verdrillung in diese Richtung führte also wahrscheinlich nicht zur Verformung des Materials. Möglich wäre auch eine über die Dauer des Versuchs zunehmende statische Aufladung der Luft, da am Versuchstag ein Gewitter aufzog. Trotz des Kupfergitters könnte dies zu einer Störung der Messung führen.

Grundsätzliche Fehlerquellen des Versuchs bestehen außerdem in der statischen Aufladung der Kugeln an sich, die bei zu großen Ladungen auch durch das Kupfergitter Kräfte auf die kleinen Kugeln auswirken würden. Auch die Masse des Gebäudes könnte sich auf die Genauigkeit des Versuchs auswirken. Da die verwendete Apparatur I in Fensternähe aufgebaut ist, könnte die einseitige Masseverteilung des Gebäudes zu einer grundsätzlichen Auslenkung der kleinen Kugeln beitragen.



## A Tabellen und Grafiken

Extremaler Messwert $y_i$	1. Mittelung $\bar{y}$	2. Mittelung $\langle \bar{y} \rangle$
[cm]	[cm]	[cm]
126.0		
106.0	115.500	
124.0	115.250	
107.0	115.125	
122.5	114.750	
107.0	114.250	113.9375
120.5	113.750	
107.0	113.250	
118.5	112.750	
107.0	112.500	
117.5	112.250	
107.0		

Tabelle 1: Extrema der Schwingungen bei Auslenkung  $\alpha = 45^\circ$

Extremaler Messwert $y_i$	1. Mittelung $\bar{y}$	2. Mittelung $\langle \bar{y} \rangle$
[cm]	[cm]	[cm]
109.0		
164.0	137.375	
112.5	137.250	
160.0	137.000	
115.5	137.000	
157.0	137.000	137.025
118.5	137.000	
154.0	136.750	
120.5	136.750	
152.0	137.000	
123.5	137.125	
149.5		

Tabelle 2: Extrema der Schwingungen bei Auslenkung  $\alpha = -45^\circ$

## Literatur

- [1] GROSSE-KNETTER, Jörn ; SCHAAF, Peter: *Das Physikalische Praktikum : Handbuch 2012 für Studentinnen und Studenten der Physik*. Universitätsverlag Göttingen, 2012
- [2] LIDE, David P. (Hrsg.): *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. 90. Ausgabe. CRC, 2010
- [3] MESCHEDE, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Ausgabe. Springer, 2006