



Physikalisches A-Praktikum

## Versuch 1

# Der Pohlsche Resonator

Praktikanten:	Julius Strake	Betreuer:	Hendrik Schmidt
	Niklas Bölter	Durchgeführt:	26.06.2012
Gruppe:	17	Unterschrift:	_____



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
2.1	Der harmonische Oszillator . . . . .	4
2.2	Oszillator mit äußerer Anregung . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>9</b>
<b>A</b>	<b>Tabellen und Grafiken</b>	<b>10</b>

## 1 Einleitung

Bei diesem Versuch wird das nach dem Göttinger Physikprofessor ROBERT WICHARD POHL benannte POHLSche Rad benutzt, um die physikalischen Eigenschaften eines gedämpften harmonischen Oszillators zu untersuchen.

## 2 Theorie

### 2.1 Der harmonische Oszillator

Bei einem harmonischen Oszillator wirkt auf ein physikalisches Objekt eine Rückstellkraft, die proportional zur Auslenkung von einer Ruhelage ist. Beim POHLSchen Resonator wird das rückstellende Drehmoment  $T$  auf eine Schwungscheibe durch eine Spiralfeder erzeugt (Meschede, 2006, S. 85):

$$\begin{aligned} T &= -D\varphi \\ J\ddot{\varphi} &= -D\varphi \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $D$  die Federkonstante der Feder und  $J$  das Trägheitsmoment der Schwungscheibe. Dies beschreibt einen ungedämpften harmonischen Oszillator mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$ :

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t) \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}. \quad (2)$$

Zusätzlich wird das POHLSche Rad durch Reibung und eine Wirbelstrombremse gebremst, dabei ist das bremsende Drehmoment linear von der Winkelgeschwindigkeit abhängig, so dass sich insgesamt folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -2k\dot{\varphi} - \frac{D}{J}\varphi \\ 0 &= \ddot{\varphi} + 2k\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi \end{aligned}$$

Hier bezeichnet  $k$  die Dämpfungskonstante der gedämpften Oszillation.

Diese Differentialgleichung hat zwei Lösungen (Meschede, 2006, S. 150):

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 \exp(\lambda t) \\ \lambda_{1,2} &= -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Bei der hier vorliegenden schwachen Dämpfung ergibt sich ein negativer Radikand, der Realteil liefert nun die Gleichung für die gedämpfte Schwingung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp(-kt) \sin(\omega_e t) \quad (3)$$

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - k^2} \quad (4)$$

Dabei ist das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maxima nur von der “einhüllenden” Exponentialfunktion abhängig, was zur Definition des logarithmischen Dekrements  $\Lambda$  führt:

$$\Lambda = \ln \left( \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} \right) = kT \quad (5)$$

## 2.2 Oszillator mit äußerer Anregung

Bei einer sinusförmigen äußeren Anregung mit der Anregungsfrequenz  $\omega$  ergibt sich ein zusätzlicher Term in der Differentialgleichung:

$$N \cos(\omega t) = \ddot{\varphi} + 2k\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi$$

Eine Lösung für den stationären Zustand lautet (Meschede, 2006, S. 154):

$$\varphi(t) = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2k\omega)^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (6)$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{2k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (7)$$

Dabei bezeichnet  $\phi$  die Phasenverschiebung zwischen äußerer Anregung und Oszillator.

## 3 Durchführung

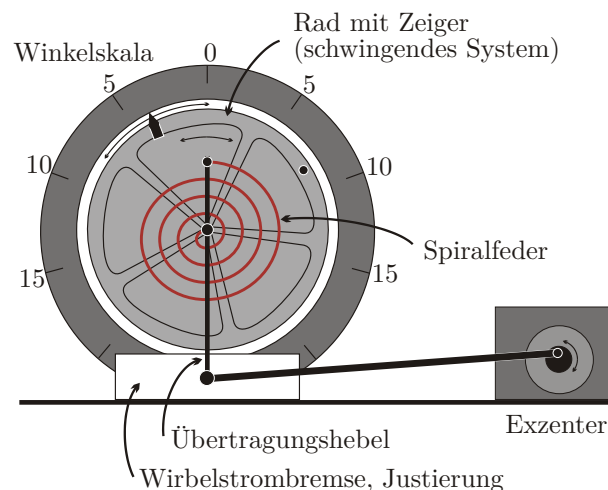


Abbildung 1: Skizze des Pohlschen Resonators (Quelle: Schaaf und Große-Knetter, LP).

Der Pohlsche Resonator (Abb. 1) besteht aus einem Schwungrad, welches mit einer Spiralfeder verbunden ist. Die Dämpfung der Schwingung kann mit einer Wirbelstrombremse eingestellt werden.

Das äußere periodische Anregungsmoment wird mittels eines computergesteuerten Schrittmotors erzeugt. Der Computer wird auch für die Aufnahme der Messwerte benutzt, bei der das Programm *kPohl* eingesetzt wird.

Zuerst wird die freie gedämpfte Schwingung (ohne äußere Anregung) für verschiedene Einstellungen der Wirbelstrombremse gemessen. Danach wird die erzwungene Schwingung für verschiedene Frequenzen zwischen 100 mHz und 600 mHz gemessen, und zwar ebenfalls für verschiedene Einstellungen der Wirbelstrombremse. Dabei werden möglichst viele Messreihen in der Nähe der Resonanzfrequenz durchgeführt.

## 4 Auswertung

Zuerst werden die Abklingkurven  $\phi(t)$  aufgetragen (Abb. 4, Abb. 5, Abb. 6 sowie Abb. 7).

Nun wird die Zeit über der Zahl der Amplitudendurchläufe aufgetragen (Abb. 8), dann wird mit gnuplot via linearer Regression die Eigenfrequenz der Oszillation bestimmt, denn in einer Periode hat der Oszillator natürlich zwei Amplitudendurchläufe, also mit  $t(x) = m * x + b \Rightarrow T = 2m = \omega_e/2\pi$ :

$\omega_{e,0\text{ mm}} = (2.069 \pm 0.003) \text{ Hz}$
$\omega_{e,4\text{ mm}} = (2.117 \pm 0.005) \text{ Hz}$
$\omega_{e,6\text{ mm}} = (2.139 \pm 0.009) \text{ Hz}$
$\omega_{e,8\text{ mm}} = (2.114 \pm 0.021) \text{ Hz}$

Jetzt werden die logarithmischen Dekremente von zwei aufeinanderfolgenden Extrema bestimmt (Tab. 2), als Mittelwert ergeben sich:

$\Lambda_{0\text{ mm}} = (0.106 \pm 0.007)$
$\Lambda_{4\text{ mm}} = (0.449 \pm 0.030)$
$\Lambda_{6\text{ mm}} = (0.862 \pm 0.018)$
$\Lambda_{8\text{ mm}} = (1.489 \pm 0.057)$

Dabei wurde die Standardabweichung für die Fehlerabschätzung benutzt.

Mit Formel (5) kann nun leicht die Dämpfungskonstante  $k$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \Lambda &= kT \\ \Rightarrow k &= \frac{\Lambda\omega_e}{2\pi} \\ \sigma_k &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{(\Lambda\sigma_{\omega_e})^2 + (\omega_e\sigma_{\Lambda})^2} \end{aligned}$$

$k_{0\text{ mm}} = (0.34 \pm 0.01)10^{-1} \text{ Hz}$
$k_{4\text{ mm}} = (1.51 \pm 0.03)10^{-1} \text{ Hz}$
$k_{6\text{ mm}} = (2.93 \pm 0.04)10^{-1} \text{ Hz}$
$k_{8\text{ mm}} = (5.01 \pm 0.15)10^{-1} \text{ Hz}$

Mit Gleichung (4) lässt sich jetzt auch die ungedämpfte Eigenfrequenz  $\omega_0$  berechnen:

$$\begin{aligned}\omega_e^2 &= \omega_0^2 - k^2 \\ \Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\omega_e^2 + k^2} \\ \sigma_{\omega_0} &= \frac{\sqrt{(\omega_e \sigma_k)^2 + (k \sigma_{\omega_e})^2}}{\sqrt{\omega_e^2 + k^2}}\end{aligned}$$

$\omega_{0,0 \text{ mm}} = (2.069 \pm 0.002) \text{ Hz}$
$\omega_{0,4 \text{ mm}} = (2.122 \pm 0.004) \text{ Hz}$
$\omega_{0,6 \text{ mm}} = (2.159 \pm 0.005) \text{ Hz}$
$\omega_{0,8 \text{ mm}} = (2.173 \pm 0.016) \text{ Hz}$

Mit den Dämpfungskonstanten und der ungedämpften Eigenfrequenz  $\omega_{0,0 \text{ mm}}$  können nun über die Formel (6) Vorhersagen über die Resonanzfrequenz der getriebenen Oszillation gemacht werden:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2k\omega)^2}} \cos(\omega t + \phi) \\ \Rightarrow 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{d\omega} ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2k\omega)^2) \\ \omega_r &= \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2} \\ \sigma_{\omega_r} &= \frac{\sqrt{(\omega_0 \sigma_k)^2 + (k \sigma_{\omega_0})^2}}{\sqrt{\omega_0^2 - 2k^2}}\end{aligned}$$

Die Ergebnisse und die experimentell bestimmten Resonanzfrequenzen sind in Tab. 1 zusammengefasst.

	$\omega_r [\text{Hz}]$	
	Vorhersage	Experiment
4 mm Dämpfung	$2.06 \pm 0.04$	$2.03 \pm 0.04$
6 mm Dämpfung	$2.03 \pm 0.05$	$2.00 \pm 0.04$
8 mm Dämpfung	$1.94 \pm 0.16$	$1.98 \pm 0.04$

Tabelle 1: Resonanzfrequenzen der getriebenen Oszillation

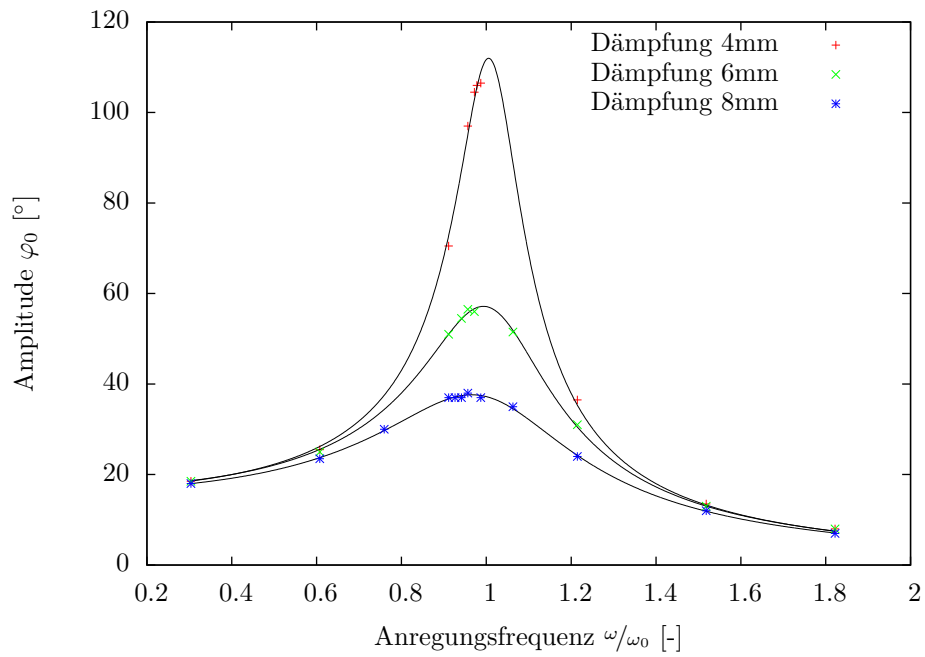


Abbildung 2: Amplituden bei verschiedenen Anregungsfrequenzen

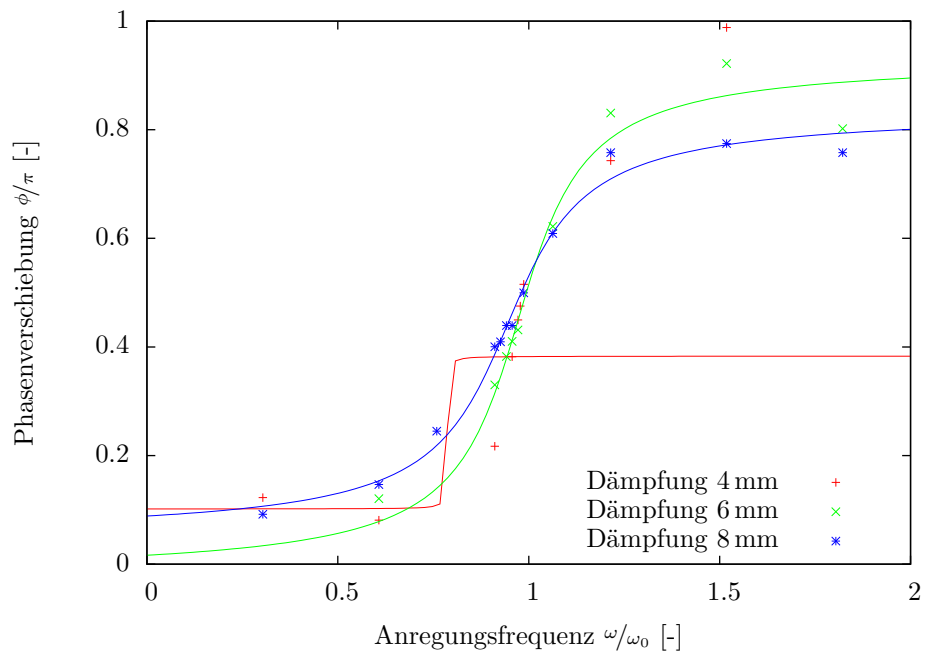


Abbildung 3: Phasenverschiebung bei verschiedenen Anregungsfrequenzen



## 5 Diskussion

Zuerst fällt auf, dass die Eigenfrequenzen der freien Oszillation signifikant der Theorie widersprechen, tendenziell werden sie bei größerer Dämpfung ebenfalls größer, obwohl das Gegenteil der Fall sein sollte! Es wurden mehrere Ansätze getestet, zuerst nur mit dem Abstand von Nulldurchgängen, dann mittels linearer Regression über alle Amplitudendurchgänge, aber alle haben denselben Trend bestätigt. Die Ursache dafür ist unklar, aber vermutlich ist zumindestens die erste gemessene Frequenz, bei der geringsten Dämpfung, verlässlich. Hier konnten natürlich auch am meisten Messwerte aufgenommen werden.

Die Logarithmischen Dekremente sind im Gegensatz dazu qualitativ auf jeden Fall aussagekräftig, bei höherer Dämpfung steigen sie signifikant an. Durch die merkwürdigen Ergebnisse bei den Eigenfrequenzen sind aber die Dämpfungskonstanten vermutlich stärker fehlerbehaftet als die mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmten Fehler vermuten lassen.

Bei den ungedämpften Eigenfrequenzen ist eine starke Abweichung von bis zu 5% zu verzeichnen, die sicherlich von den oben beschriebenen Problemen abhängt. Auch hier ist aber vermutlich dem ersten Ergebnis, welches für die weitere Auswertung gebraucht wurde, noch am ehesten zu vertrauen.

Beim Frequenzgang (Abb. 2) haben wir leider bei 4 mm Dämpfung nicht genug Messreihen für den Bereich 320 MHz bis 380 MHz gemacht, so dass die Regression mit dem arctan Ansatz aus Formel (7) bei dieser Dämpfung nicht wirklich vertrauenswürdig ist ( $\chi_{\text{red}}^2 = 2.77$ ). Die anderen beiden Regressionen zeigen aber eine sehr gute Übereinstimmung mit der Theorie ( $\chi_{\text{red},6\text{ mm}}^2 = 0.29$ ,  $\chi_{\text{red},8\text{ mm}}^2 = 0.12$ ).

Bei der Phasenverschiebung (Abb. 3) mussten verschiedene Probleme umgangen werden, was zu einer etwas unorthodoxen Lösung geführt hat (Abb. 9). Qualitativ scheint das Phasendiagramm aber auf jeden Fall mit der Theorie übereinzustimmen. Der Wert für 600 Hz fällt bei allen drei Dämpfungen sehr stark ab, für 4 mm Dämpfung war er sogar vollständig unbrauchbar ( $\phi = -128^\circ$ ) und wurde für die Regression ignoriert.

## A Tabellen und Grafiken

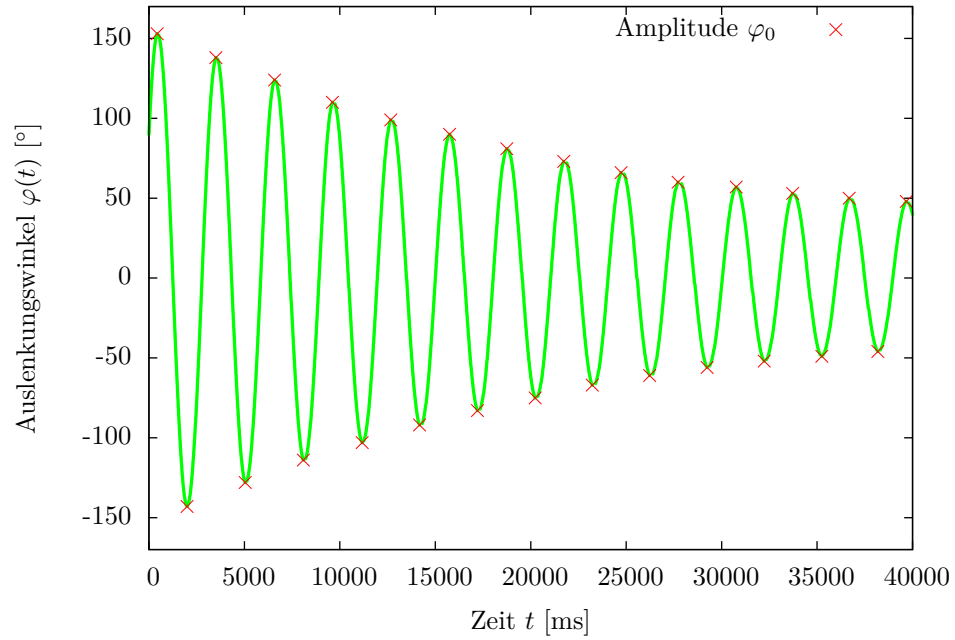


Abbildung 4: Abklingkurve der freien Schwingung für 0 mm Dämpfung

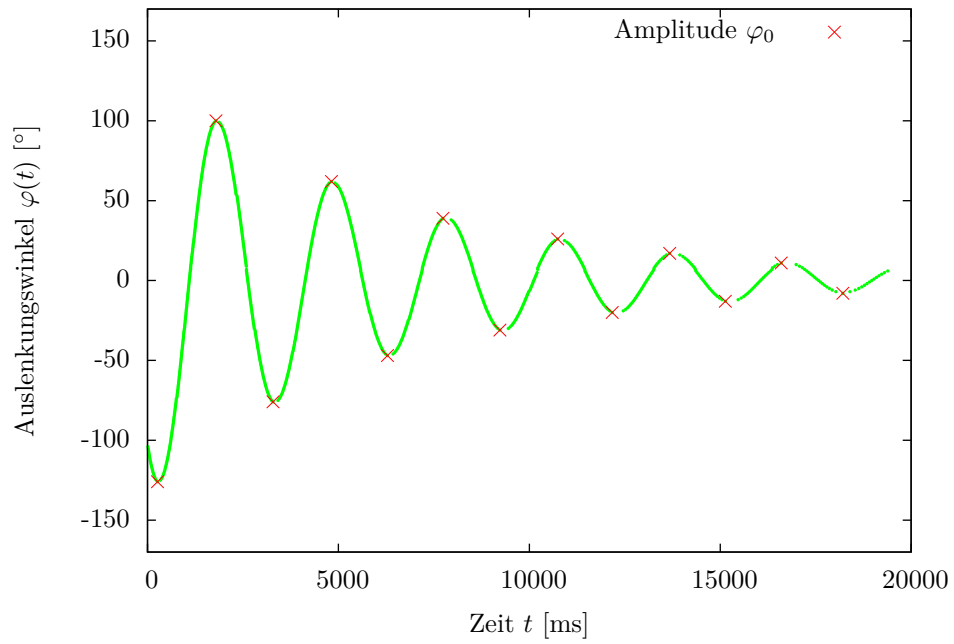


Abbildung 5: Abklingkurve der freien Schwingung für 4 mm Dämpfung

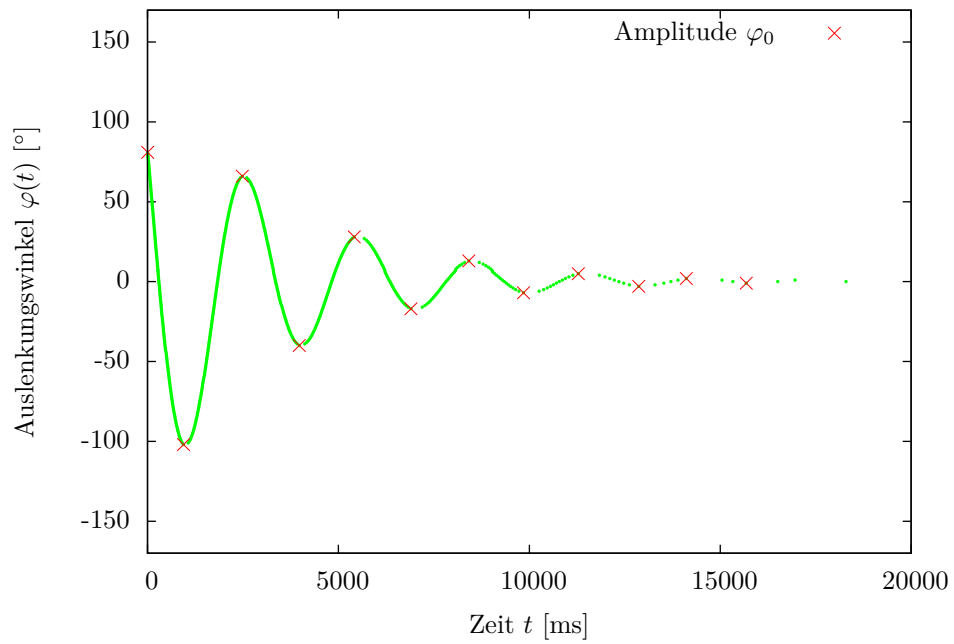


Abbildung 6: Abklingkurve der freien Schwingung für 6 mm Dämpfung

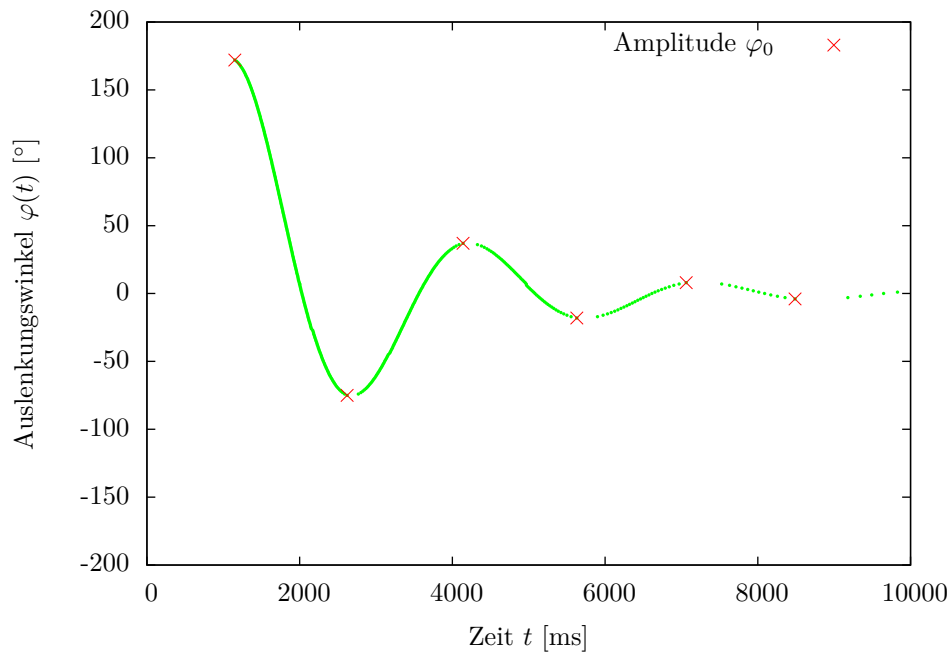
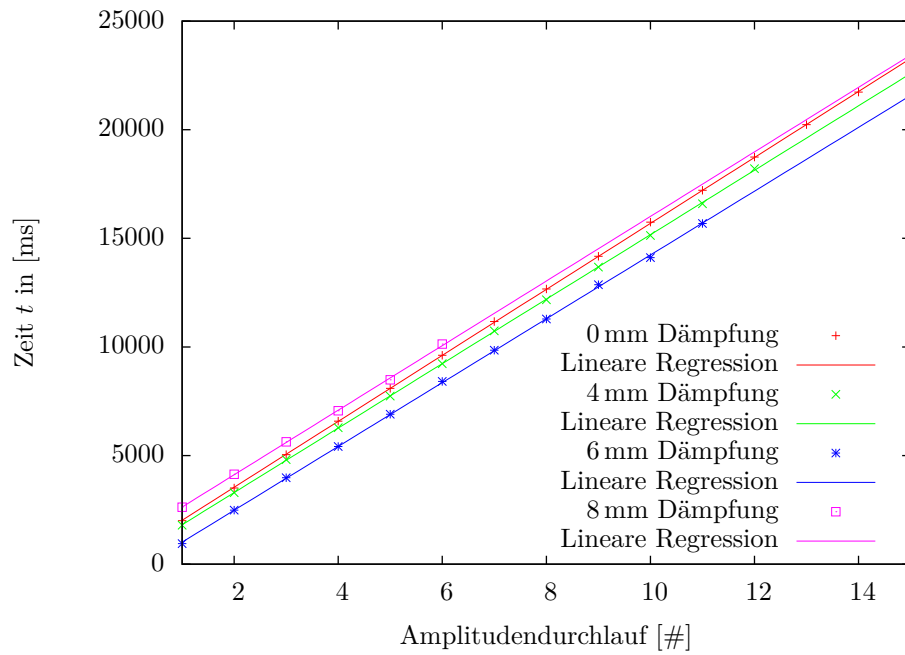


Abbildung 7: Abklingkurve der freien Schwingung für 8 mm Dämpfung

Abbildung 8: Lineare Regression zur Bestimmung der Eigenfrequenz  $\omega_e$

0 mm Dämpfung	4 mm Dämpfung	6 mm Dämpfung	8 mm Dämpfung
0.10318	0.47804	0.85745	1.53658
0.11081	0.48059	0.85567	1.42711
0.10697	0.46357	0.88730	1.50408
0.11583	0.41616	0.84730	
0.11980	0.40547		
0.10147	0.43825		
0.10536	0.42488		
0.11294	0.43078		
0.09531	0.48551		
0.10295	0.47000		
0.10536			
0.10135			
0.10399			

Tabelle 2: Logarithmische Dekremente der freien Oszillation

```

if int(measurement[ 'Anregungsfrequenz' ]) > 0:
    difference = zero - float(measurement[ 'Nullpunkt_ Erreger_ [ms]' ])
    _phase = 360.0*(difference % timescale)/timescale

    # Use adaptive timescale, the frequency given
    # by the computer is completely inaccurate. :-(
    timescale = (zero - time)
    zero = time

    # Crap values in the first seconds.
    if time < 10000.0:
        continue

    # Average over the phase angles
    phase = phase * float(phasecount)/float(phasecount + 1)
    phasecount = phasecount + 1
    phase = phase + _phase/float(phasecount)

```

Abbildung 9: Python Code zur Berechnung der Phasenverschiebung

## Literatur

[Meschede 2006] MESCHEDÉ, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Ausgabe. Springer, 2006

[Schaaf und Große-Knetter ] SCHAAF, Peter ; GROSSE-KNETTER, Jörn: *LP - Der Pohlische Resonator*. – URL <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3548>. – Zugriffsdatum: 2012-07-04