13 Magnetfeld von Spulen

Dieser Versuch führt in die Erzeugung von Magnetfeldern und deren Messung durch verschiedene Methoden ein: Probespule und Hallsonde.

13.1 Stichworte

Induktionsgesetz, Induktionskonstante, Biot-Savartsches Gesetz, magnetischer Fluss, Messung von Magnetfeldern, Hall-Sonde, Helmholtzspule.

13.2 Literatur

Gerthsen: Kap. 7.1, 7.2; BS-2: Kap. IV/35; Walcher: Kap. 5.4; Dem-2; NPP; Geschke.

13.3 Zubehör

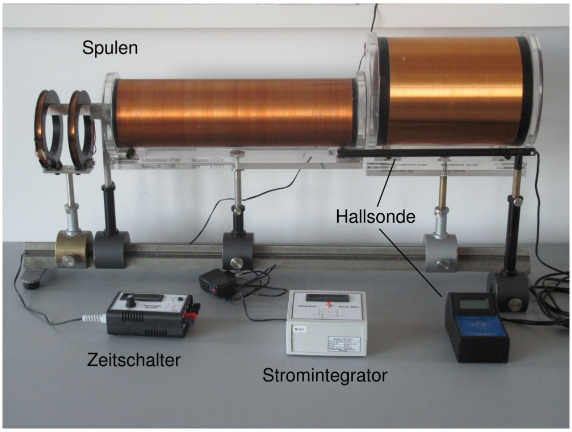

Bild 13.1: Der Versuch »Magnetfelder von Spulen«.

Bild 13.1 zeigt ein Foto des Versuches mit Zubehör: 2 Luft-Spulen, 1 Helmholtzspule, 1 Induktionsspule, 1 Netzgerät (0-60 V, 1 A), 1 Hallsonde , 2 Schalter, 1 Voltmeter, 1 Ampèremeter, 1 Stromintegrator, 2 Schutzwiderstände, 1 Zeitschalter mit 2 V Netzteil zur Eichung.

13.4 Grundlagen

Induktionsgesetz, magnetischer Fluss: Der magnetische Fluss ϕ durch eine ebene Leiterschleife der umschlossenen Fläche $\vec{A}$, die von der Flussdichte $\vec{B}$ durchsetzt wird, ist definiert als: $\phi = \vec{A} \cdot \vec{B}$.

Ändert sich dieser Fluss zeitlich, auf welche Weise auch immer, wird in dieser Leiterschleife eine Spannung $U_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} = -\dot{\phi}$ induziert (Induktionsgesetz).

Biot-Savartsches Gesetz: Ein einzelnes Teilchen der Ladung q mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Koordinatenursprung erzeugt in einem Raumpunkt $\vec{r}$ die magnetische Flussdichte $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}\times\vec{r}]}{|r|^3}$. Die Flussdichte, die durch ein Stromelement erzeugt wird, erhält man durch den Übergang von $q\vec{v}$ zu $I\mathrm{d}\ell$, da $A\,\mathrm{d}\ell\,\vec{j} = \mathrm{d}N\,q\vec{v}$. Das Biot-Savartsche Gesetz, das die magnetische Flussdichte eines stromdurchflossenen Leiters an einem Punkt $\vec{r}$ beschreibt, lautet also:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I[\mathrm{d}\vec{\ell}\times\frac{\vec{r}}{|r|}]}{|r^2|} \quad , \mathrm{d}\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{I[\mathrm{d}\vec{\ell}\times\frac{\vec{r}}{|r|}]}{|r^2|} \tag{13.1}$$

Induktionskonstante μ_0: Außer der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$, die bei zeitlicher Änderung ein elektrisches Feld induziert, wird auch die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ benutzt. Sie bezeichnet die Stärke des Feldes um einen u.U. auch zeitlich konstanten Strom. Zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$ besteht eine Proportionalität, die durch die Induktionskonstante bzw. magnetische Feldkonstante μ_0 beschrieben wird:

$$\vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} \tag{13.2}$$

$$\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\,. \tag{13.3}$$

μ_r ist dabei eine dimensionslose Materialkonstante, die relative Permeabilität, und ist für Para- und Diamagnete ≈ 1. Für Ferromagnete beträgt μ_r allerdings einige 100 bis zu 100 000.

Die Größe der Induktionskonstante kann auch relativ verständlich aus den Maxwell-Gleichungen hergeleitet werden. Betrachtet man zuerst eine beliebige statische Ladungsverteilung, so erhält man wegen der Energieerhaltung ein rotationsfreies E-Feld $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ und $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Letzteres folgt direkt aus der Maxwell-Gleichung $\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$ mit $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$. Bewegt sich nun das Bezugssystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$, d.h. die Ladungsverteilung ist abhängig von $\vec{r}$ ($\rho(\vec{r})$), so bewegen sich alle Ladungen mit $-\vec{v}$ und es gibt für den Betrachter eine Stromdichteverteilung $\vec{j} = -\rho \cdot \vec{v}$. Daher existieren B-Felder, die sich zu

$$\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\,[\vec{v}\times\vec{E}] \tag{13.4}$$

ergeben. Divergenz und Rotation berechnen sich daraus zu:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\,\vec{v}\,\mathrm{div}\,\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\,\rho\,\vec{v} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\,\vec{j} \tag{13.5}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\,\mathrm{div}\,[\vec{v}\times\vec{E}] = \frac{1}{c^2}\vec{v}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \tag{13.6}$$

Da die Ladungsverteilung in sich statisch ist, ist auch $\dot{D} = 0$ und daher gilt $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$. Durch

Einsetzen folgt direkt die Proportionalität zwischen B und H:

$$\vec{H} = \varepsilon_0 \cdot c^2 \cdot \vec{B} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \tag{13.7}$$

Messung von Magnetfeldern:

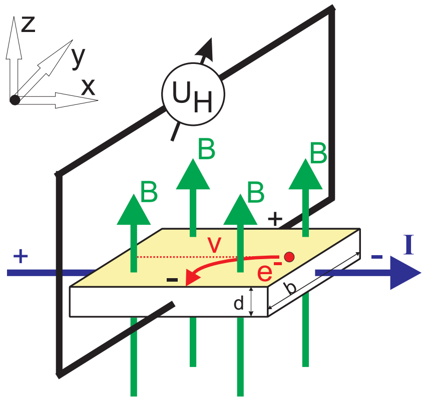

Bild 13.2: Prinzipskizze einer Hallsonde.

Magnetfelder werden heutzutage mit Hall-Sonden gemessen. Die Funktionsweise der Hall-Sonde ist denkbar einfach: Eine quaderförmige Sonde der Länge ℓ und der Querschnittsfläche $A = b \cdot d$, meist bestehend aus einem Halbleiter, wird von einem möglichst konstanten elektrischen Strom I in x-Richtung durchflossen. Stromfluss bedeutet hier, dass sich die verfügbare Anzahl freier Elektronen n entgegen der Richtung des extern angelegten elektrischen Feldes mit der mittleren Geschwindigkeit $v = \beta \cdot E_x$ bewegt (β=Beweglichkeit der Ladungsträger). Die Löcher bewegen sich entsprechend entgegengesetzt. In der Zeit Δt bewegen sich nun alle Ladungsträger, die im Volumen mit der Grundfläche A und der Höhe $v \cdot \Delta t$, enthalten sind durch die Grundfläche A hindurch. Das sind $\Delta N = nAv\Delta t$ Ladungsträger und daher ist die Stromstärke durch diese Fläche $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q\,n\,v\,A$.

Bringt man die Sonde nun in ein magnetisches Feld der Flussdichte B in z-Richtung, so wirkt auf alle orthogonal zum Feld bewegten Ladungen eine Lorentzkraft. Im Idealfall $\vec{j} \perp \vec{B}$ beträgt die Kraft $F = qvB$ und die Ladungen werden an den beiden Seiten der Sonde getrennt. Es entsteht also ein elektrisches Feld in y-Richtung und es wirkt auf die bewegten Ladungen eine Kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Kompensiert diese Kraft die Lorentzkraft, sind die Bahnen der bewegten Ladungsträger wieder geradlinig und es kann in y-Richtung die Sättigungsspannung bzw. »Hallspannung« abgegriffen werden:

$$U_H = E_y \cdot b = v \cdot B \cdot b \tag{13.8}$$

Die abgegriffene Spannung ist also proportional zur magnetischen Flussdichte.

Eine andere Methode zur Messung von Magnetfeldern ist die Messung mit Hilfe einer Induktionsspule. Dabei wird in das zu messende Feld eine kleine Induktionsspule mit der Spulenachse parallel zu $\vec{B}$ gebracht. Ändert sich z.B. durch plötzliches Ein- oder Ausschalten des äußeren

B-Feldes der magnetische Fluss Φ durch die Spule, wird ein Spannungstoß U_{ind} induziert:

$$\int_{t_1}^{t_2} U_{\mathrm{ind}}\,\mathrm{d}t = n \cdot \Delta\Phi \; = n\,B\,A\,. \tag{13.9}$$

Diesen Spannungsstoß (Induktionsstoß) kann man z.B. mit Hilfe eines Stromintegrators messen (siehe Versuch 11): Die induzierte Spannung U_{ind} erzeugt einen Strom I_{ind} über den Innenwiderstand R_i des Stromintegrators (gegen den der ohmsche Widerstand der Spule vernachlässigt werden kann), so dass

$$\int_{t_1}^{t_2} U_{\mathrm{ind}}\,\mathrm{d}t = R_i \cdot \int_{t_1}^{t_2} I_{\mathrm{ind}}\,\mathrm{d}t = R_i Q_{\mathrm{mess}} \tag{13.10}$$

gilt, wobei Q_{mess} die vom Stromintegrator gemessene Ladung ist.

13.5 Fragen

1. Wie lassen sich Magnetfelder um einen Draht berechnen? Wie für Spulen? Was gilt für eine Anordnung von mehreren Spulen?
2. Warum weicht die allgemeine Formel

$$H \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{n \cdot I}{\ell}\,\left[\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} + \frac{\ell - a}{\sqrt{R^2+(\ell-a)^2}}\right] \tag{13.11}$$

   (mit a: Abstand vom Spulenende; R: Spulenradius; ℓ: Länge der Spule; n: Windungszahl; I: Primärstrom)

   für das Magnetfeld einer Spule von der bekannten Formel für das Magnetfeld einer langen Spule ab? Welche Effekte werden dadurch berücksichtigt? Welche Resultate sind daher für diesen Versuch zu erwarten? Leiten Sie die Formel her!
3. Welche Vor- und welche Nachteile hat die Messung eines Magnetfeldes mittels Hall-Sonde im Vergleich zur Messung mit Hilfe einer Induktionsspule?
4. Welche Bedeutung hat μ_0 ? Wie lässt sich μ_0 aus dem Versuch bestimmen?
5. Warum soll die maximale Stromstärke begrenzt bleiben?

13.6 Durchführung

1. Das Ladungsmessgerät, welches wie in Versuch 11 bereits gesehen mittels eines Kondensators den Strom aufintegriert, muss zunächst mit einem Strompuls, der durch einen elektronischen Zeitschalter definiert wird, geeicht werden. Die Impulszeit ist mit einem Drehknopf im Bereich $50\ldots500\,\mathrm{ms}$ einstellbar. Der Schalter wird durch drücken des Knopfs ausgelöst. Eichung mit mindestens zehn verschiedenen Pulslängen im gesamten einstellbaren

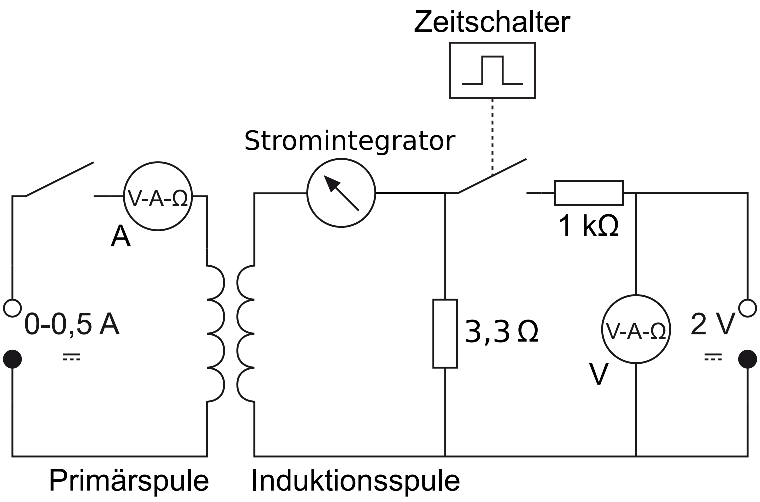

Bild 13.3: Schaltung zur Messung des Magnetfeldes von Spulen mit der Induktionsspule.

Bereich durchführen. Eine kurze Erläuterung zur Bedienung des Stromintegrators liegt am Versuchsplatz aus.

2. Die Induktionsspule wird in die Mitte der längeren der beiden Spulen gebracht. Durch Ein- und Ausschalten eines Primärstromes von 0,5 A wird ein Spannungsstoß erzeugt, die resultierende integrierte Ladung wird bei mehreren Positionen der Induktionsspule auf der Längsachse der Spule mit Hilfe des Ladungsmessgeräts gemessen. Die Schrittweite beträgt 2 cm, die Messung sollte auch außerhalb der Primärspule fortgesetzt werden.
3. Mit Hilfe der Hall-Sonde werden die Magnetfelder der beiden Spulen und der Helmholtzspule in Abhängigkeit von der Position auf der Längachse gemessen. Die Schrittweite beträgt 1 cm, die Stromstärke I=0,5 A.
4. Bitte alle benötigten Spulendaten notieren.

13.7 Auswertung

1. Der für die längere Spule gemessene Feldverlauf ist grafisch darzustellen. Dabei vergleiche man die Ergebnisse der Messung mit Hall-Sonde und mit Induktionsspule. Welche Abweichungen ergeben sich? Welche Messung erscheint zuverlässiger?
2. Die mit der Hall-Sonde gemessenen Feldstärken auf den Längsachsen der beiden Spulen sind grafisch darzustellen. Diese Kurven sind mit den theoretischen zu vergleichen, die sich aus der Formel (13.11) ergeben. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den durch die bekannte Formel berechneten:

$$H = \frac{n \cdot I}{\ell} \,. \tag{13.12}$$

3. Vergleichen Sie grafisch die Homogenität und Stärke des Feldes der Helmholtzspulen mit

denen der 2 anderen Spulen. Stimmt die gemessene Flussdichte mit der durch die Formel

$$B = \mu_0 I \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \cdot \frac{n}{R} \tag{13.13}$$

(siehe auch Versuch 12 »Spezifische Elektronenladung«) theoretisch berechneten überein?

4. Bestimmen Sie aus allen Ihren Messungen die Induktionskonstante μ_0 und vergleichen Sie sie mit dem Literaturwert $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$ (dies ist ein exakter Wert; alternative Einheit: H/m).

13.8 Bemerkungen

Die maximale Spulen-Stromstärke beträgt 0,8 A.