



Physikalisches A-Praktikum

Versuch 13

Magnetfeld von Spulen

Protokollant:	Julius Strake	Betreuer:	Johannes Schmidt
Mitpraktikant:	Niklas Bölter	Durchgeführt:	17.09.2012
Gruppe:	B006	Unterschrift:	_____

E-Mail: julius.strake@stud.uni-goettingen.de

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Die Hall-Sonde	5
3	Durchführung	6
3.1	Aufbau und Eichung	6
3.2	Messung per Induktionsspule	6
3.3	Messung per Hall-Sonde	7
4	Auswertung	7
4.1	Eichung des Stromintegrators	7
4.2	Ermittlung der magnetischen Flussdichten	8
4.3	Bestimmung der Vakuumpermeabilität	8
5	Diskussion	13
A	Tabellen und Grafiken	15

1 Einleitung

In diesem Versuch soll das Magnetfeld verschiedener Spulen gemessen werden. Hierzu wird eine Induktionsspule und eine Hall-Sonde verwendet. Besonders die Unterschiede in der Genauigkeit beider Messmethoden sollen untersucht werden. Auch wird der Einfluss des Verhältnisses von Durchmesser und Länge der zu messenden Spulen auf das resultierende Magnetfeld genauer betrachtet.

2 Theorie

Fließt Strom durch einen Leiter, so erzeugt jener abhängig von verschiedenen Faktoren ein Magnetfeld \mathbf{B} . Dieses verhält sich den MAXWELL-Gleichungen entsprechend (Griffiths, 1999, S. 326):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad (4)$$

Zusätzlich wird der magnetische Fluss Φ durch eine Fläche \mathbf{A} definiert als (Griffiths, 1999, S. 295):

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Fließt ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss durch eine Leiterschleife der Fläche \mathbf{A} , so wird in dieser Schleife eine Spannung induziert, für die gilt (Griffiths, 1999, S. 296):

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -\dot{\Phi} \\ &= \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (5)$$

Formel 2 ist zu entnehmen, dass ein veränderliches Magnetfeld ein elektrisches Feld erzeugt (und umgekehrt). Dieses kann in einfachen Fällen mittels Formel 5 berechnet werden.

Wendet man letztere auf eine Spule mit Querschnittsfläche \mathbf{A} und N Windungen an, so ergibt sich (Meschede, 2006, S. 383):

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= N \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A} \\ \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} U_{\text{ind}} dt &= N \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (6)$$

Mit dem OHMSchen Gesetz $U = RI$ ergibt sich für einen Stromkreis mit dem Gesamtwiderstand R , in dem sich eine Spule befindet, ein einfacher Zusammenhang zur Bestimmung der induzierten Spannung und damit des Magnetfeldes:

$$\int_{t_0}^{t_1} U_{\text{ind}} dt = R \int_{t_0}^{t_1} I_{\text{ind}} dt = R Q_{\text{ind}}, \quad (7)$$

wobei Q_{ind} die im Stromkreis geflossene Ladung darstellt. Diese Messung kann zum Beispiel mit einem Stromintegrator vorgenommen werden.

Bei einer realen Spule kann man abhängig von Länge l , Abstand vom Spulenende a , Spulenradius R , Windungszahl N und Spulenstrom I die magnetische Flussdichte bestimmen durch (Demtröder, 2004, S. 107):

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2l} \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{l - a}{\sqrt{R^2 + (l - a)^2}} \right). \quad (8)$$

Oft werden auch sogenannte HELMHOLTZ-Spulen verwendet. Diese weisen ein besonders homogenes Magnetfeld auf und es gilt für die magnetische Flussdichte in der Mitte zwischen den Spulen (vgl. Versuch 12 - „Die spezifische Elektronenladung“):

$$B = \mu_0 I \sqrt{\frac{4}{5}} \frac{N}{R}. \quad (9)$$

2.1 Die Hall-Sonde

Um Magnetfelder zu messen, wird oft die sogenannte HALL-Sonde verwendet. Diese besteht meist aus einem Halbleiterplättchen, das wie in Abbildung 1 mit Messgeräten und Spannungsquellen verbunden ist. Durch die Lorentz-Kraft werden die

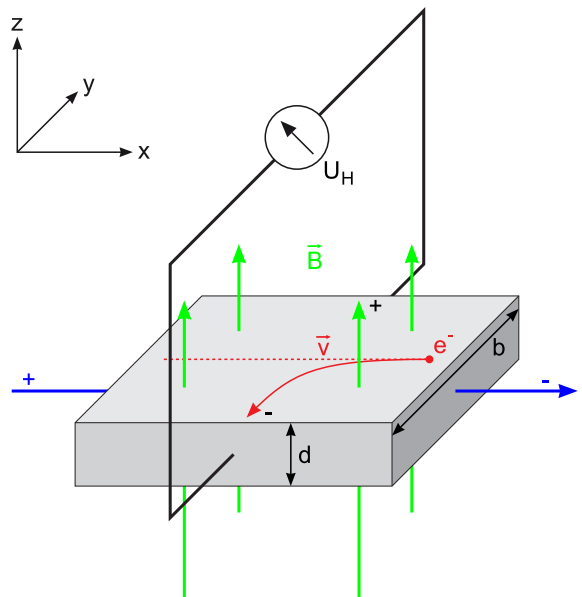


Abbildung 1: Aufbau einer Hall-Sonde (Prior u. a.)

Ladungsträger, die aufgrund der anliegenden Spannung in x -Richtung durch das Plättchen fließen, in z -Richtung abgelenkt und sammeln sich an einer Seite an. Dadurch entsteht eine messbare Spannung zwischen den Seiten des Plättchens, die *Hall-Spannung*. Für die Hall-Spannung U_H gilt (Meschede, 2006, S. 350):

$$U_H = -\frac{IB}{end},$$

wobei I der Strom durch die Sonde, B die Komponente des Magnetfeldes, die senkrecht zur Sonde steht, e die Ladung der Ladungsträger, n die Ladungsträgerdichte und d die Dicke des Halbleiterscheibchens.

3 Durchführung

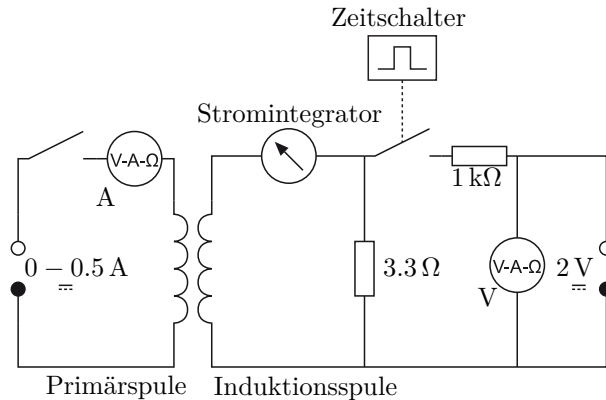


Abbildung 2: Schaltplan, verändert nach (Schaaf und Große-Knetter, Magnetfeld von Spulen)

3.1 Aufbau und Eichung

Zunächst wird der Stromkreis wie in Abbildung 2 gezeigt aufgebaut. Zur Verringerung von Messfehlern sollte darauf Acht gegeben werden, dass der Stromintegrator möglichst abseits der anderen Geräte steht.

Während des Aufbaus werden sowohl die Eichspannung als auch die verbauten Widerstände und der Widerstand des Stromintegrators mit einem Multimeter gemessen. Auch die Spulendaten der drei verfügbaren Spulen werden zur theoretischen Berechnung des jeweiligen Magnetfeldes aufgenommen.

Das Ladungsmessgerät muss nun mit Hilfe des Pulsgebers geeicht werden. Hierzu wird bei abgeschalteter Primärspannung die Pulszeit des Zeitschalters zwischen 50 ms und 500 ms variiert und jeweils die am Stromintegrator angezeigte Ladungsmenge (in Skalenteilen) nach einem Strompuls notiert. Um polungsbedingte Fehler zu vermeiden, sollte diese Messung nach einer Umpolung wiederholt werden.

3.2 Messung per Induktionsspule

Ab jetzt wird im Sekundärkreis der Zeitschalter nicht mehr geschlossen, sodass zur Vermeidung etwaiger Störungen der rechte Teil des Kreises auch entfernt werden kann. Im Primärkreis wird die Spannungsquelle so eingestellt, dass ein Strom von 0.5 A gemessen wird. Hiermit kann später das Magnetfeld theoretisch vorhergesagt werden. Es wird nun die Induktionsspule auf die Mitte der langen Primärspule justiert. Mit der Spule an verschiedenen Positionen entlang der Schiene (im Abstand von 2 cm) wird dann der Schalter ein- und ausgeschaltet und am Stromintegrator jeweils der integrierte induzierte Strom abgelesen. Es ist darauf zu achten, die Messpunkte über die ganze Schiene zu verteilen.

3.3 Messung per Hall-Sonde

Anschließend wird der Sekundärkreis abgebaut und der Primärstrom bis zum Ende der jeweiligen Messreihe eingeschaltet.

Mittels der Hall-Sonde werden dann die Magnetfelder der drei verfügbaren Spulen gemessen. Hier wird wieder entlang der gesamten Schiene mit Schritten von 1 cm je ein Wert notiert.

4 Auswertung

4.1 Eichung des Stromintegrators

Zunächst muss der Stromintegrator, der die gemessene Ladung in einer unbekanntem Einheit misst (im folgenden Skalenteile, Skt.), geeicht werden. Der Fehler wird auf etwa 5 Skt. geschätzt.¹

Die Kirchhoffschen Regeln ergeben aufgrund der benutzten Schaltung für den Strom $I_{\text{Integrator}}$ durch den Integrator:

$$I_{\text{Integrator}} = \frac{U_{\text{Puls}}}{\left(R_{1000} + \left(R_{3.3}^{-1} + R_{\text{Integrator}}^{-1} \right)^{-1} \right) \left(\frac{R_{\text{Integrator}}}{R_{3.3}} + 1 \right)} = (7.42 \pm 0.40) \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

Es bezeichnen $R_{\text{Integrator}} = (901 \pm 0.17) \Omega$ den Widerstand des Stromintegrators, $R_{3.3} = 3.3 \Omega$ einen der Ohmschen Widerstände und $R_{1000} = 1000 \Omega$ den anderen.

Hierfür kann Gleichung 7 verwendet werden. Für die gemessene Ladung muss bei Impulsdauer t , Spannung U und Widerstand R gelten:

$$k_{\text{eich}} = \frac{Q}{Q_{\text{mess}}} = \frac{Ut}{RQ_{\text{mess}}},$$

wobei Q_{mess} (in Skt.) die gemessene Ladung, k_{eich} (in Coulomb/Skt.) die Eichkonstante und Q die Ladung in Coulomb ist. Für die Eichkonstante ergibt sich aus den verschiedenen Messungen nach Bildung des gewichteten Mittels mit entsprechendem Fehler:

$$k_{\text{eich}} = (4.86 \pm 0.11) \cdot 10^{-9} \text{ C/Skt.}$$

Es lässt sich auch ein direkter Umrechnungsfaktor zwischen gemessener Ladung Q_{mess} und magnetischer Flussdichte B errechnen:

$$k_{\text{direkt}} = \frac{B}{Q_{\text{mess}}} = \frac{Ut}{NAQ_{\text{mess}}}$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen und gewichtete Mittelung mit dem entsprechenden Fehler:

$$k_{\text{direkt}} = (4.36 \pm 0.11) \cdot 10^{-6} \text{ T/Skt.}$$

¹Die Werte für die verschiedenen Polungen lagen etwa um diesen Wert auseinander.

4.2 Ermittlung der magnetischen Flussdichten

Mit k_{direkt} ergeben sich für die Messungen an der langen Spule mit Hilfe der Induktionsspule die in den Abbildungen 3 und 4 dargestellten Flussdichten.

In diesen sind auch die mit der Hall-Sonde ermittelten Werte aufgetragen. Hier mussten die gemessenen Werte nur mit 10^{-4} multipliziert werden, da $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ gilt. Die Abbildungen 5 und 6 zeigen die mit der Hall-Sonde ermittelten Messdaten für die dicke Spule und die Helmholtz-Spulen. Der theoretische Wert für die Helmholtz-Spulen wurde mit Formel 9 bestimmt.

Zum Vergleich der drei Spulen sind in Abbildung 7 die drei mit der Hall-Sonde gemessenen Flussdichten zusammengefasst. Die Werte wurden dafür so skaliert, dass die jeweiligen Spulenenden sich an der gleichen Stelle befinden.

Auffällig ist die größere Flussdichte bei sehr viel homogenerem Magnetfeld bei den Helmholtz-Spulen. Die beiden anderen Spulen weisen je einen Maximalwert der magnetischen Flussdichte auf, wohingegen bei den Helmholtz-Spulen über 4 cm Maximalwerte gemessen wurden. Außerdem ist eine deutlich höhere Homogenität des Magnetfeldes bei der langen im Vergleich zur dicken Spule festzustellen.

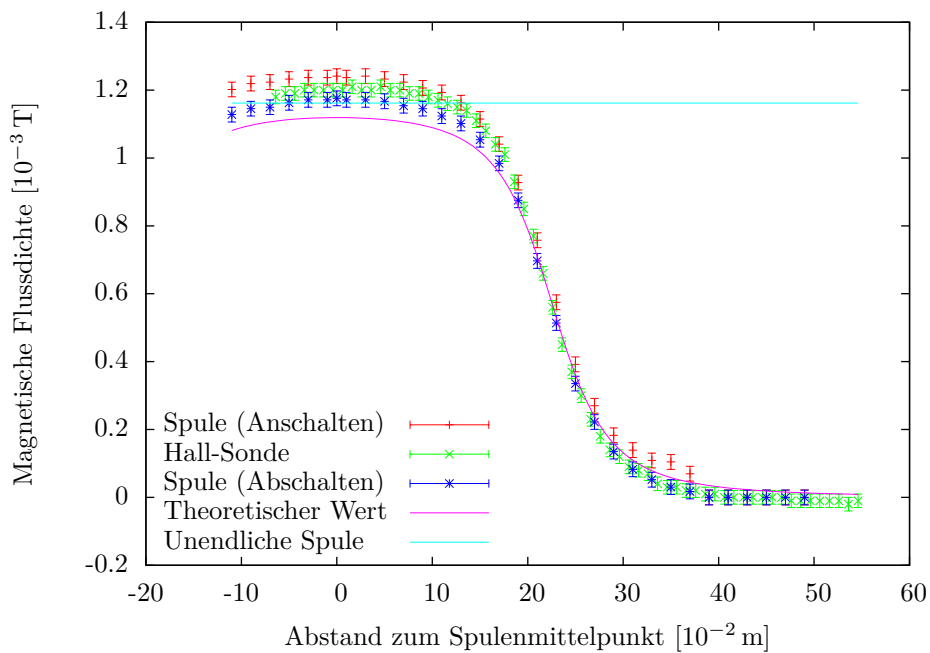


Abbildung 3: Magnetische Flussdichte in der langen Spule

4.3 Bestimmung der Vakuumpermeabilität

Vergleicht man die oben bestimmten Werte der magnetischen Flussdichte mit den theoretisch aus Formel 8 ermittelten, so kann man daraus die Vakuumpermeabilität

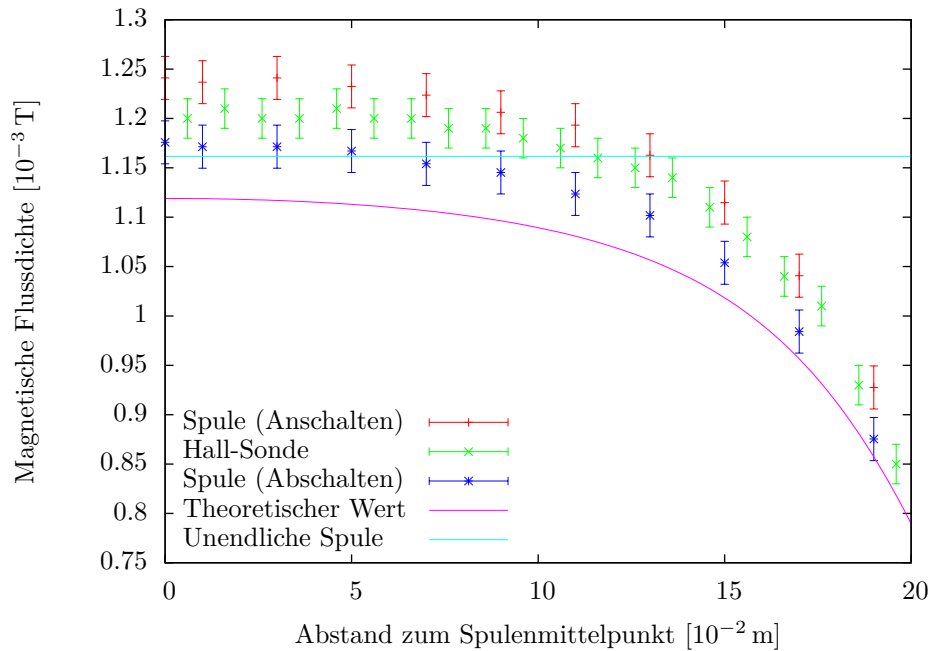


Abbildung 4: Magnetische Flussdichte in der langen Spule (Detailansicht)

μ_0 bestimmen:

$$\mu_0 = \frac{2Bl}{N} \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{l-a}{R^2 + (l-a)^2} \right)^{-1}$$

Für die bei den Helmholtz-Spulen aufgenommenen Werte wurde Formel 10 zur Berechnung von μ_0 verwendet.

Die Ergebnisse dieser Bestimmung sind für die verschiedenen Spulen und Messverfahren in den Abbildungen 8 und 9 dargestellt und mit dem Literaturwert verglichen. Außerdem sind in Tabelle 1 signifikante Werte für die verschiedenen Spulen zusammengefasst. Die mit der Induktionsspule aufgenommenen Werte für die lange Spule sind dabei jeweils mit „Anschalten“ oder „Abschalten“ bezeichnet worden.

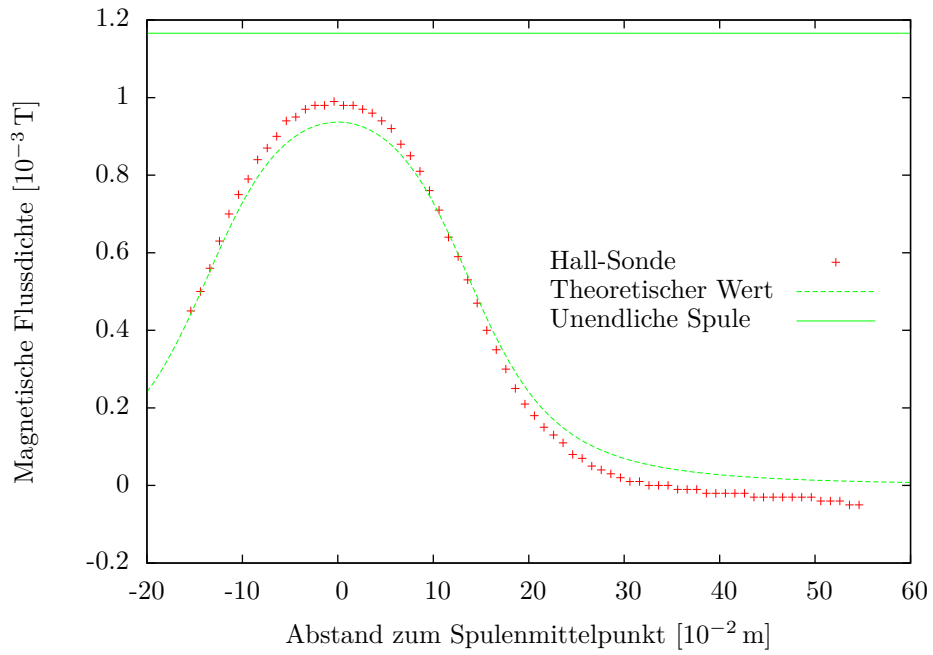


Abbildung 5: Magnetische Flussdichte in der dicken Spule

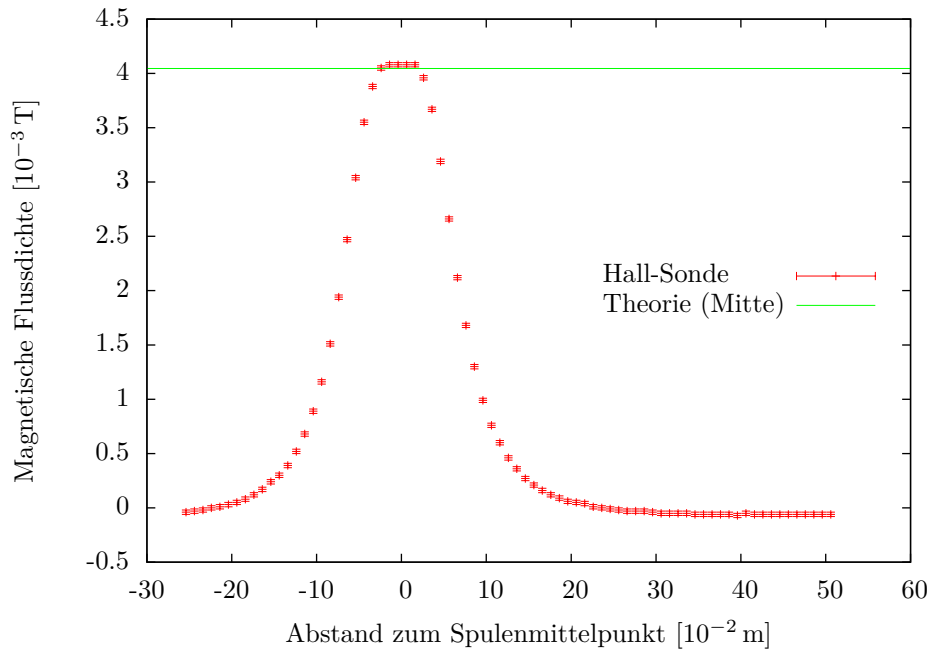


Abbildung 6: Magnetische Flussdichte in den Helmholtzspulen

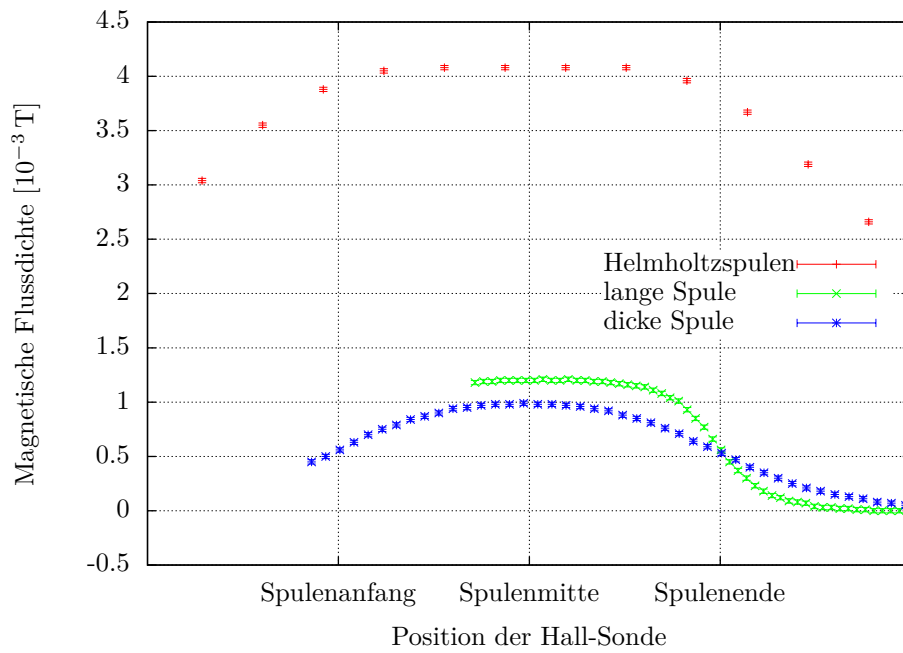


Abbildung 7: Vergleich der Homogenität und Feldstärke bei den drei Spulen

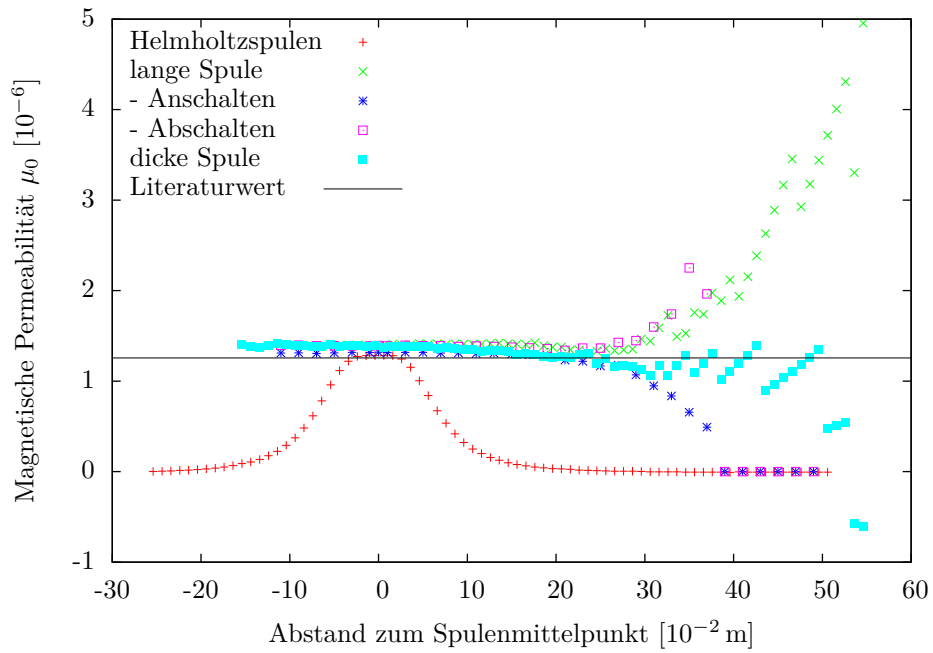


Abbildung 8: Berechnete Vakuumpermeabilität

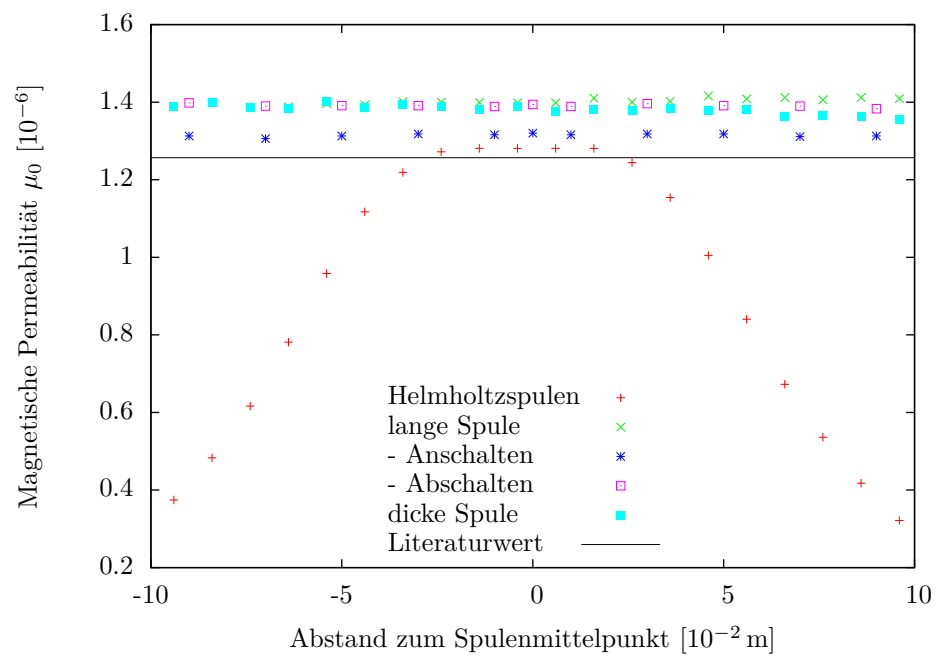


Abbildung 9: Berechnete Vakuumpermeabilität (Detailansicht)

5 Diskussion

Insgesamt sind die ermittelten Magnetfelder der Spulen erfreulich erwartungsgemäß.

Vergleicht man die Messung des Magnetfelds der langen Spule über die Hall-Sonde mit der Messung über die Induktionsspule, so fällt eine erfreuliche Konsistenz der Ergebnisse auf. Zwar sind die Werte der Induktionsspule beim Anschalten der Spannung stets höher und beim Ausschalten niedriger als bei der Hall-Sonde, die jeweiligen Fehlerintervalle überschneiden sich jedoch meist. Die Konsistenz der Werte fällt vor allem bei einer Mittelwertbildung der beiden Messungen per Induktionsspule im Spuleninneren auf (siehe Abb. 10). Es scheint also ein systematischer Fehler vorzuliegen, der sich durch eine zu stark gemessene Ladung im Stromintegrator ausdrückt.

Bestimmt man das gewichtete Mittel der beiden Datensätze aus der Messung per Induktionsspule, so scheint aufgrund der kleineren Fehlerintervalle diese Messung genauer zu sein.

Grund hierfür könnte zum Beispiel die Unabhängigkeit letzterer Methode von äußeren (unveränderlichen) Magnetfeldern sein, welche die Hall-Sonde mitmisst.

Vergleicht man die Werte der Messung per Hall-Sonde mit den theoretisch aus Formel 8 ermittelten, fällt auf, dass außerhalb der Spule die Werte sehr gut übereinstimmen. Näher an der Spulenmitte wird die Abweichung jedoch recht groß. Hier stimmt der Wert eher mit dem über die idealisierte Formel für eine unendliche Spule berechneten überein. Verantwortlich hierfür könnte zum Beispiel ein zu gering angenommener Spulenstrom sein.

Bei der dicken Spule hingegen ist die Abweichung des gemessenen Wertes vom theoretisch ermittelten fast durchgängig recht groß. Das Maximum der Flussdichte in der Spulenmitte ist etwas schmaler und höher, sodass vermutlich ein etwas zu großer Wert für den Durchmesser oder ein zu kleiner Wert für die Länge der Spule gemessen wurde. Im Vergleich mit dem Wert aus der Formel für eine unendliche Spule sind die Werte jedoch sehr viel kleiner, hier passt der gemessene Verlauf auch in der Nähe der Spulenmitte ganz offensichtlich besser zu dem aus Formel 8 bestimmten theoretischen Wert.

Desweiteren ist die Feststellung der sehr viel höheren Homogenität der Helmholtz-Spulen gegenüber den einzelnen erfreulich, entspricht sie doch sehr gut den Erwartungen.

Im Vergleich zum mit Formel 9 ermittelten Wert für die magnetische Flussdichte in der Spulenmitte scheinen die Werte bei den Helmholtz-Spulen jedoch etwas zu groß zu sein. Dies dürfte auch eine Folge zu starker Idealisierung sein. Berechnungen des Magnetfeldes auf der Längsachse mit folgender Formel führen zu durchaus passenden Werten zwischen den beiden Spulen (Demtröder, 2004, S. 91):

$$B(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \frac{\mu_0 I}{R} \left(1 - \frac{144z^4}{125R^4}\right) \quad (10)$$

Die hiermit erzielten Ergebnisse sind in Abbildung 11 zu sehen.

Auch die bestimmten Werte für μ_0 weisen nur geringe Abweichungen vom Literaturwert auf. Auffällig ist jedoch die sehr viel größere Abweichung vom Literaturwert

bei Berechnung mit Werten des Magnetfelds für Punkte weit von der Spulenmitte.

Dies ist durch die vermutlich zu starke Idealisierung der verwendeten Formel zu erklären, die vor allem für Punkte innerhalb einer Spule eine sehr gute Näherung des realen Magnetfeldes angibt. Auch die Störung der Messung durch das Erdmagnetfeld oder andere stationäre Felder könnte bei sehr kleinen Werten der magnetischen Flussdichte der Spule durch die sehr viel stärkere relative Abweichung des Messwertes vom eigentlichen Wert dieses Phänomen erklären.

Eine weitere Auffälligkeit ist im Vergleich der mit der Induktionsspule aufgenommenen Werte zu bemerken. Beim Anschalten der Spannung wurden durchgängig höhere Werte für die Magnetische Flussdichte gemessen.

Verantwortlich hierfür könnten zum Beispiel kapazitive Effekte im Stromintegrator sein. Auch ein zu klein angenommener Versatz des Stromintegrators würde das Phänomen erklären, da das Vorzeichen der im Sekundärkreis induzierte Spannung von der Richtung der Magnetfeldänderung abhängig ist.

Zur allgemeinen Ungenauigkeit trägt außerdem vermutlich die Ausrichtung der Hall-Sonde bei, die essenziell zur Messung ist, da nur die Komponente des Magnetfeldes, die senkrecht zum Halbleiterplättchen steht, gemessen wird.

Auch ungenau angegebene Widerstände, die als exakt angenommen wurden, führen zu weiteren Fehlern.

Zusammenfassend sind die Ergebnisse dieses Versuches sehr erfreulich ausgefallen. Nur kleine Abweichungen von theoretisch berechneten oder Literaturwerten sind aufgetreten und es gab weder Komplikationen bei der Durchführung noch bei der Auswertung.

A Tabellen und Grafiken

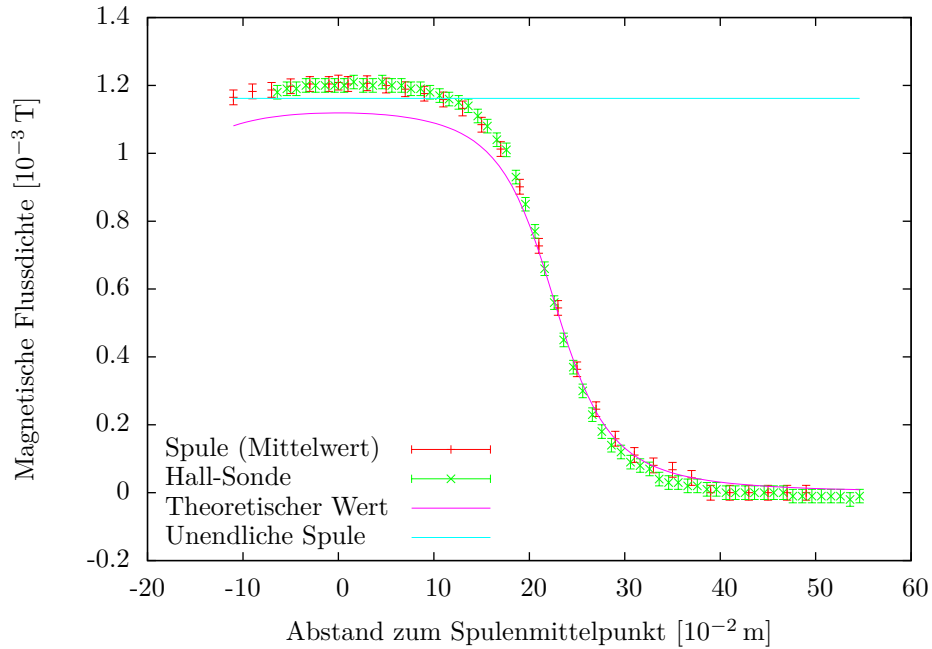


Abbildung 10: Vergleich des Mittelwerts der beiden Messungen per Induktionsspule mit der Messung per Hall-Sonde und den theoretischen Werten.

Spulentyp	Vakuumpermeabilität in der Mitte [10 ⁻⁶ Vs/Am]
Lange Spule	1.398
Lange Spule (Indukt.)	1.357
Dicke Spule	1.389
Helmholtz-Spulen	1.281
Literaturwert	1.257

Tabelle 1: Gemessene Vakuumpermeabilitäten in der Mitte der Spulen und Literaturwert (Lide, 2010)

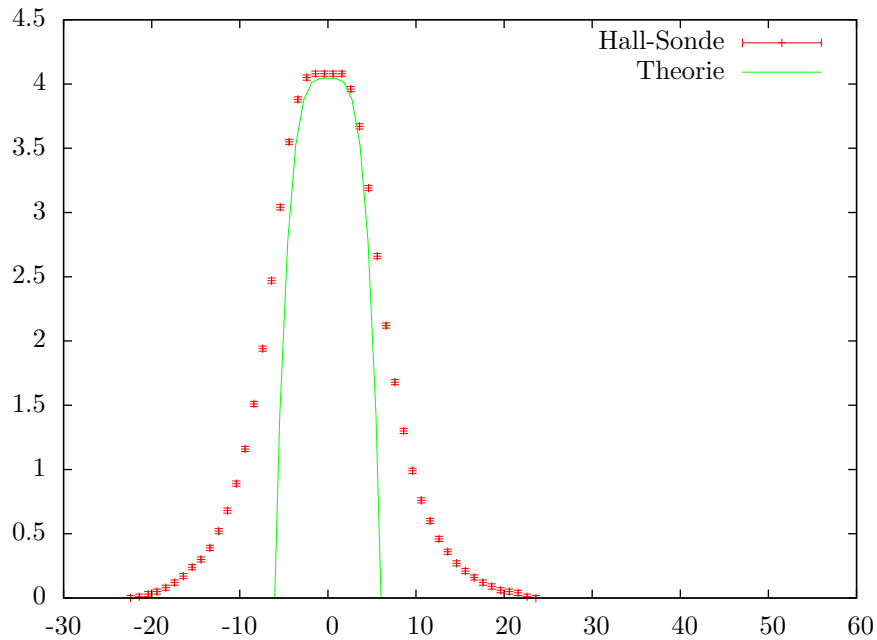


Abbildung 11: Magnetfeld der Helmholtz-Spulen mit theoretischem Wert aus weniger idealisierter Formel.

Literatur

- [Demtröder 2004] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 2*. 3. Ausgabe. Springer, 2004
- [Griffiths 1999] GRIFFITHS, David J.: *Introduction to Electrodynamics*. 3rd edition. Prentice Hall, 1999
- [Lide 2010] LIDE, David P. (Hrsg.): *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. 90. Ausgabe. CRC, 2010
- [Meschede 2006] MESCHEDER, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Ausgabe. Springer, 2006
- [Prior u. a.] PRIOR, Mira ; GROSSE-KNETTER, Jörn ; SCHAAF, Peter: *LP - Magnetfeld von Spulen*. – URL <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/4087>. – Zugriffsdatum: 2012-09-17
- [Schaaf und Große-Knetter] SCHAAF, Peter ; GROSSE-KNETTER, Jörn: *LP - Magnetfeld von Spulen*. – URL <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/4087>. – Zugriffsdatum: 2012-09-20