



Physikalisches A-Praktikum

Versuch 4

Kreiselpräzession

Protokollant:	Julius Strake	Betreuer:	Hendrik Schmidt
Mitpraktikant	Niklas Bölter	Durchgeführt:	17.07.2012
Gruppe:	17	Unterschrift:	_____

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Kräftefreie Kreisel	4
2.2	Nutation	4
2.3	Präzession	5
2.4	Versuchsspezifische Details	5
3	Durchführung	7
4	Auswertung	8
4.1	Trägheitsmomente aus der Geometrie	8
4.2	Trägheitsmoment aus der Pendelbewegung	9
4.3	Trägheitsmomente aus der Präzessionsbewegung	9
4.4	Messung der Nutation	9
5	Diskussion	10
A	Tabellen und Grafiken	11

1 Einleitung

Ziel des Versuches ist es, durch Messungen am ruhenden und rotierenden Kreisel seine charakteristischen Bewegungen nachzuvollziehen und die Gesetzmäßigkeiten zu bestätigen, die die Kreiselbewegung festlegen. Es werden hierbei die Eigenschaften der Präzessions- und Nutationsbewegung ausgemessen und die darüber bestimmten Trägheitsmomente mit den aus den geometrischen Daten errechneten Werten verglichen.

2 Theorie

Unter einem Kreisel versteht man einen beliebigen rotierenden starren Körper. Da die allgemeine Beschreibung solcher Körper recht aufwendig sein kann, beschränkt sich der Theorieteil auf sogenannte *symmetrische Kreisel*, zu denen auch der Versuchskreisel zählt. Sie besitzen eine Symmetrieachse, die *Figurenachse*, um die die Rotation durchgeführt wird. Der Kreisel wird dabei an Translationsbewegungen gehindert, indem er im Schwerpunkt oder in einem anderen Punkt auf der Figurenachse festgehalten wird.

2.1 Kräftefreie Kreisel

Ein Kreisel heißt *kräftefrei*, wenn alle auf den Kreisel wirkenden äußeren Drehmomente sich zu Null addieren. Um den Kreisel anfangs in Drehung zu versetzen, benötigt man ein kurzzeitig von außen angreifendes Drehmoment. Stimmt die Richtung hiervon mit der Richtung der Figurenachse überein, beginnt der Kreisel, um diese Achse zu rotieren und behält die Drehung bei, bis äußere Kräfte (z.B. Reibung, Schwerkraft, etc) ihn beeinträchtigen.

2.2 Nutation

Fallen die Richtung von Figurenachse und anfänglichem Drehmoment nicht zusammen oder wirkt zwischenzeitlich ein weiteres Drehmoment auf den Kreisel, beschreibt die Figurenachse während der Drehung einen Kegelmantel (siehe Abb. 2). Die Spitze des Kegels liegt im Unterstützungspunkt. In diesem Fall nennt man die Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}(t)$ die *momentane Drehachse*. Gewichtet man die parallel zur Figurenachse ($\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$) und senkrecht auf ihr stehende ($\boldsymbol{\omega}_{\perp}$) Komponente der Winkelgeschwindigkeit mit den zugehörigen Hauptträgheitsmomenten I_{\parallel} und I_{\perp} , so erhält man den Gesamtdrehimpuls [1, 20-8] (siehe auch Abb. 1):

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\parallel} + \mathbf{L}_{\perp} = I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp} \quad (1)$$

Dieser definiert dann eine im Raum feste Achse, um die die Figurenachse und die momentane Drehachse jeweils Kegelmäntel verschiedener Öffnungswinkel beschreiben. Den Kegel der Figurenachse nennt man *Nutationskegel*, den der momentanen Drehachse *Rastpolkegel*. Entsprechend wird die Rotation der Figurenachse um die Drehimpulsachse als *Nutation* bezeichnet.

Wegen $|\mathbf{L}| = |\mathbf{L}_{\parallel}|(\cos \varphi)^{-1} = |\mathbf{L}_{\perp}|(\sin \varphi)^{-1}$ gilt für die Winkelgeschwindigkeit der Nutation $\boldsymbol{\omega}_N$ bei einem Öffnungswinkel des Nutationskegels von φ [4]:

$$|\boldsymbol{\omega}_N| = \frac{\omega_{\perp}}{\sin \varphi} = \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \frac{\omega_{\parallel}}{\cos \varphi} \quad (2)$$

2.3 Präzession

Wirkt ab dem Zeitpunkt t_0 ein konstantes Drehmoment \mathbf{D} in Bezug auf den Unterstützungspunkt auf den Kreisel, so ändert sich der Drehimpuls \mathbf{L} mit der Zeit t und es gilt [3]:

$$\mathbf{D} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{L}_0 \quad (3)$$

\mathbf{L}_0 bezeichnet hier den Drehimpuls bei $t = t_0$ und $\boldsymbol{\omega}_P$ die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Drehimpuls um die das Drehmoment erzeugende Kraft \mathbf{F} dreht.

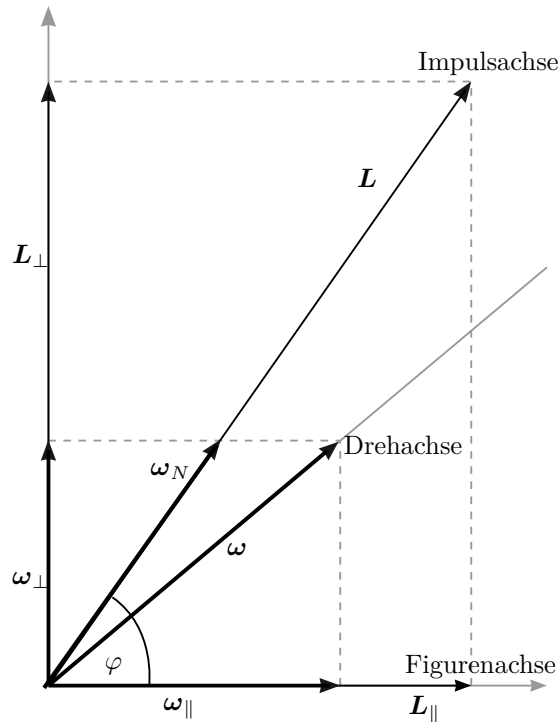


Abbildung 1: Die verschiedenen Achsen der Kreiselbewegung, verändert nach [2].

Diese Drehung bezeichnet man als *Präzession*. Beträgsmäßig folgt also, wenn α den Winkel zwischen Kraft- und Impulsachse bezeichnet:

$$|\mathbf{D}| = |\mathbf{L}| |\boldsymbol{\omega}_P| \sin \alpha = I \omega |\boldsymbol{\omega}_P| \sin \alpha, \quad (4)$$

$$\Rightarrow I = \frac{|\mathbf{D}|}{|\boldsymbol{\omega}_P| \omega \sin \alpha} = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{F}|}{|\boldsymbol{\omega}_P| \omega \sin \alpha} = \frac{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}| \sin \alpha}{|\boldsymbol{\omega}_P| \omega \sin \alpha} = \frac{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}|}{|\boldsymbol{\omega}_P| \omega} \quad (5)$$

mit $|\mathbf{L}| = I\omega$, wobei I das Trägheitsmoment des Kreisels um seine Figurenachse und ω der Betrag seiner Winkelgeschwindigkeit ist. Natürlich gilt [1, 20-6]: $|\mathbf{L}| = |\mathbf{L}_0|$.

2.4 Versuchsspezifische Details

In diesem Versuch betrachten wir einen Kreisel mit einer horizontalen Dreh- und Figurenachse. Er besteht aus einem mittig unterstützten Stab, an dessen einem Ende sich ein Rad befindet, dessen Masse durch ein zylindrisches Gewicht auf der gegenüberliegenden Seite ausgeglichen wird (siehe Abb. 3). Die gesamte Anordnung

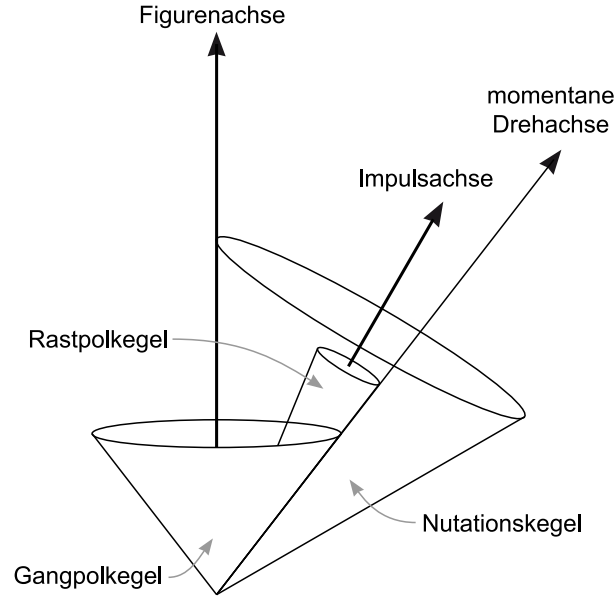


Abbildung 2: Kegelmäntel der Achsenbewegungen beim Kreisel nach [2].

ist folglich zylindersymmetrisch um die Achse des Stabes. Für die Trägheitsmomente eines Vollzylinders mit Masse m und Radius r durch seine Figuren- und eine dazu orthogonale Achse gilt [1, 19-7]:

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (6)$$

$$I_{\perp} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 \quad (7)$$

wobei l die Länge des Zylinders bezeichnet.

Das Trägheitsmoment der gesamten Anordnung bei Drehung um die Figuren- und Impulsachse ergibt sich aus der Addition der einzelnen Trägheitsmomente, wobei die Indizes wie folgt zu verstehen sind: Rad $\sim r$, Stab $\sim s$, Gewicht $\sim g$. Ordnet man den Objekten noch die Massen m_i zu, so ergibt sich:

$$I_{\text{ges},\parallel} = I_r + I_s + I_g \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2}m_r r_r^2 + \frac{1}{2}m_s r_s^2 + \frac{1}{2}m_g r_g^2 \quad (9)$$

Haben die Bestandteile die Längen l_i und die Abstände vom Unterstützungspunkt a_i , so folgt für eine vertikale Achse durch den Unterstützungspunkt mit Hilfe des STEINERSchen Satzes [3]:

$$I_{\text{ges},\perp} = (I_{r,\perp} + m_r a_r^2) + (I_{s,\perp} + m_s a_s^2) + (I_{g,\perp} + m_g a_g^2) \quad (10)$$

$$= m_r \left(\frac{1}{4}r_r^2 + \frac{1}{12}l_r^2 + a_r^2 \right) + m_s \left(\frac{1}{4}r_s^2 + \frac{1}{12}l_s^2 + a_s^2 \right) + m_g \left(\frac{1}{4}r_g^2 + \frac{1}{12}l_g^2 + a_g^2 \right) \quad (11)$$

Es bezeichnen die m_i die jeweiligen Massen, die l_i die Längen und die a_i die Abstände von der Drehachse.

Wird nun auf der Seite des Ausgleichgewichts ein zusätzliches Gewicht der Masse

m_z am Stab befestigt, so bewirkt die Schwerkraft \mathbf{F}_G ein Drehmoment \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}_G \times \mathbf{a}_z = m_z \mathbf{g} \times \mathbf{a}_z \quad (12)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{D}| = g m_z a_z \sin \alpha \quad (13)$$

Hier bezeichnet \mathbf{a}_z den Vektor vom Unterstützungspunkt zum Anhängepunkt des Gewichtes und α den Winkel zwischen \mathbf{F} und \mathbf{a}_z .

3 Durchführung

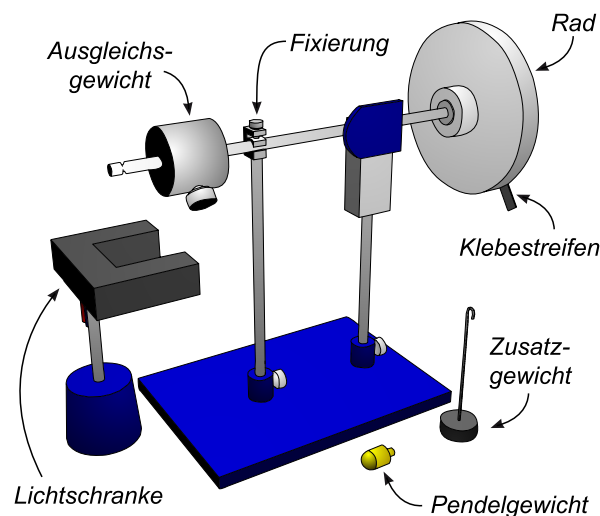


Abbildung 3: Der Versuchsaufbau nach [2].

Nach der Messung der im Messprotokoll (siehe Anhang) gekennzeichneten Größen wird zunächst das Kreisrad mit Hilfe der Fixierung eingehängt und das Zusatzgewicht, dessen Masse zu notieren ist, in das am Rad befindliche Gewinde geschraubt. Es wird dann mit einer Stoppuhr die Schwingungsdauer des so entstandenen Pendels über 10 Perioden bestimmt. Diese Messung wird auch mit dem Zusatzgewicht an der gegenüberliegenden Seite des Rades durchgeführt.

Anschließend wird ein Papierstreifen am Rad angebracht (siehe Abb. 3). Nach dem Entfernen der Fixierung wird der Kreisel durch Verschiebung des Ausgleichsgewichts in eine stabile waagerechte Lage gebracht. Hier ist auf eine feste Einspannung des Gewichtes zu achten, da sonst durch ungewollte Verschiebung ein dauerhaftes Drehmoment auf die Kreiselachse wirken könnte.

Mit Hilfe der Aufzugsschnur wird das Rad jetzt auf eine hohe Winkelgeschwindigkeit gebracht und es wird per Lichtschranke die Periodendauer der Rotation T_R gemessen. Dann wird vorsichtig ein Zusatzgewicht an die Achse des Kreisels auf gegenüberliegender Seite des Rades gehängt. Gleichzeitig wird eine Stoppuhr gestartet, um die Dauer eines halben Umlaufs um die Präzessionsachse $\frac{1}{2}T_P$ zu messen. Nach diesem halben Umlauf wird das Zusatzgewicht wieder vorsichtig entfernt und gleichzeitig die Stoppuhr gestoppt. Wie oben wird nun wieder die Periodendauer der Rotation bestimmt. Das eben entfernte Gewicht wird dann erneut angebracht und ein weiteres Mal die Dauer eines halben Umlaufs bestimmt. Diese Prozedur wird mit insgesamt drei unterschiedlichen Gewichten (hier 60 g, 80 g, 100 g) je viermal durchgeführt.

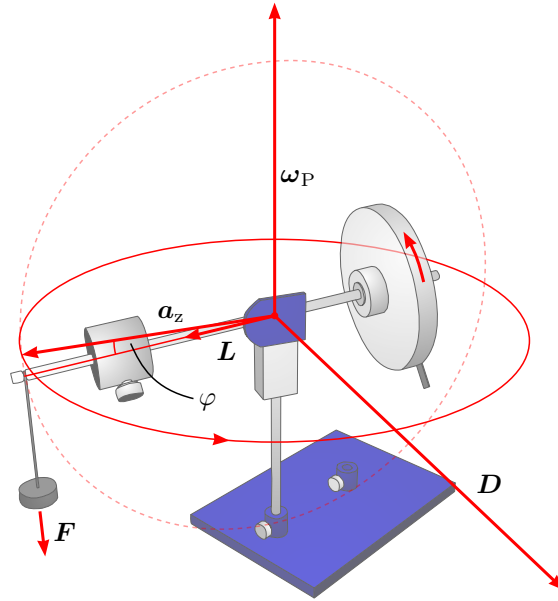


Abbildung 4: Wichtige Größen der Präzessionsbewegung, verändert nach [2].

Nun wird der Kreisel wieder aufgezogen, die Rotationsperiode bestimmt und anschließend der Achse ein kräftiger Stoß versetzt, sodass eine Nutation einsetzt. Die Schwingungsdauer dieser Nutation wird dann über 10 Perioden gemessen. Außerdem wird zur genaueren Fehlerabschätzung der Durchmesser des Nutationskegels geschätzt. Nachdem die Nutation abgeklungen ist, wird erneut die Rotationsperiode bestimmt, um nach einem weiteren Stoß wiederum die Schwingungsdauer der Nutation zu messen. Die Messung wird insgesamt viermal wiederholt.

4 Auswertung

4.1 Trägheitsmomente aus der Geometrie

Zunächst werden aus Gleichung 6 und 7 die Trägheitsmomente des Kreisels aus seiner Geometrie bestimmt:

$$\begin{aligned} I_{\parallel} &= (9.93 \pm 0.04) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \\ I_{\perp} &= (59.50 \pm 1.01) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Der Fehler ergibt sich aus den angenommenen Fehlern der Gewichte $\sigma_{\text{Gew.}} = 0.5 \text{ g}$ und der gemessenen Längen:

$$\begin{aligned} \sigma_{I_{\parallel}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}r_r^2\sigma_{m_r}\right)^2 + (m_r r_r \sigma_{r_r})^2} \\ \sigma_{I_{\perp,i}} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{m,i}}{m_i} I_{\perp,i}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_{r,i} m_i r_i\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\sigma_{l,i} m_i l_i\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_{a,i} m_i a_i\right)^2} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt dann für den Fehler des Trägheitsmoments bei zur Achse orthogonalem Drehimpuls:

$$\sigma_{I_{\perp}} = \sqrt{\sigma_{I_{\perp,r}}^2 + \sigma_{I_{\perp,s}}^2 + \sigma_{I_{\perp,g}}^2}$$

4.2 Trägheitsmoment aus der Pendelbewegung

Anschließend wird zur wiederholten Berechnung des Trägheitsmoments I_{\parallel} mittels $I_{\text{ges}} = \frac{1}{4\pi^2} T^2 g z m - m z^2$ (siehe Versuch 3: „Das Trägheitsmoment“) die Periodendauer per arithmetischer Mittelung aus den Messwerten bestimmt. In der Formel bezeichnet T die Periodendauer, g die Gravitationskonstante, z den Abstand von der Drehachse und m die Masse des Zusatzgewichtes. Es ergibt sich dann:

$$I_{\parallel} = (9.21 \pm 0.24) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$\sigma_{I_{\parallel}} = \sqrt{\left(\sigma_T \frac{g T m_g r_r}{2\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{m_g} g T^2 r_r}{4\pi^2} - \sigma_{m_g} r_r^2\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{r_r} T^2 g m_g}{4\pi^2} - \sigma_{r_r} 2 m_g r_r\right)^2}$$

4.3 Trägheitsmomente aus der Präzessionsbewegung

Nun wird das Trägheitsmoment I_{\parallel} erneut aus den Messungen zur Präzession bestimmt. Hierfür werden die gemessenen Werte für die Präzessionsfrequenz gegen die inverse Rotationsfrequenz aufgetragen und durch lineare Regression¹ der Faktor $|\omega_P|/\omega_R$ bestimmt. Für die jeweilige Rotationsfrequenz werden hier die Werte vor und nach der Messung gemittelt. Mit Hilfe von Formel 5 können nun drei Werte für das Trägheitsmoment um die Figurenachse bestimmt werden:

$$\begin{aligned} I_{\parallel,1} &= (10.99 \pm 0.35) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \\ I_{\parallel,2} &= (10.07 \pm 0.81) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \\ I_{\parallel,3} &= (9.86 \pm 0.32) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \\ \Rightarrow \bar{I}_{\parallel} &= (10.35 \pm 0.23) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{I_{\parallel}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{a_z} g m}{\omega_R \omega_P}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m a_z g}{\omega_R \omega_P}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\omega_R \omega_P} g m a_z}{(\omega_R \omega_P)^2}\right)^2}$$

4.4 Messung der Nutation

Nach dem graphischen Auftragen der Nutationsfrequenz gegen die Rotationsfrequenz und einer linearen Regression² kann die so erhaltene Steigung mit ω_N/ω_R identifiziert werden. Die Rotationsfrequenz wird wie gehabt aus den jeweiligen Messungen vor und nach der Nutationsmessung gemittelt. Es ergibt sich:

$$\frac{\omega_N}{\omega_R} = 0.145 \pm 0.017$$

Dieser Faktor stimmt wegen Gleichung 2 theoretisch mit dem Wert für $I_{\parallel}/(I_{\perp} \cos \varphi)$ überein:

$$\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp} \cos \varphi} = \frac{\omega_N}{\omega_R} = 0.169 \pm 0.007$$

Mit einem abgeschätzten Durchmesser des Nutationskegels $d = 6.0 \text{ cm}$ und der Entfernung vom Unterstützungspunkt zur Spitze der Stange am Ende des Rades a

¹via gnuplot, $\chi_{\text{red},1}^2 = 0.30$, $\chi_{\text{red},2}^2 = 1.03$, $\chi_{\text{red},3}^2 = 0.21$, siehe Abb. 5, 6 und 7

²via gnuplot, $\chi_{\text{red}}^2 = 0.38$, siehe Abb. 8

wurde der Winkel φ bestimmt durch:

$$\varphi = \arctan \frac{d}{2a} = (8.0 \pm 2.0)^\circ$$

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\frac{(\sigma_a d/a)^2 + \sigma_d^2}{4a - d^2}}$$

$$\sigma_{\frac{\omega_N}{\omega_R}} = \frac{1}{I_\perp \cos(\varphi)} \sqrt{(I_\parallel \sigma_{I_\perp} / I_\perp)^2 + (I_\parallel \tan(\varphi) \sigma_\varphi)^2 + \sigma_{I_\parallel}^2}$$

5 Diskussion

Beim Vergleich der ermittelten Trägheitsmomente (siehe Tabelle 1) ist zu sehen, dass der mit einem Gewicht von 60 g aus der Präzession ermittelte Wert stark von den anderen abweicht. Auch das Fehlerintervall ist zu gering, um dies auszugleichen. Ein Grund hierfür könnte die Ungeübtheit der Experimentatoren sein. Beim Einhängen des Gewichtes könnte es daher zu nicht zu vernachlässigenden Verlängerungen oder Verkürzungen der Periodendauer oder zu ungewollter Nutation des Kreisels gekommen sein. Dagegen spricht jedoch die Tatsache, dass die lineare Regression mit $\chi_{\text{red},1}^2 = 0.30$ recht gut ist. Da die Regression aber für eine affine Gerade ausgeführt wurde, erhält man auch einen theoretisch verschwindenden Achsenabschnitt $b_1 \approx 0.05$. Dieser ist fast doppelt so groß wie der bei den anderen Regressionen ($b_2 \approx 0.03$, $b_3 \approx -0.003$). Diese Beobachtung wird auch unterstützt durch die Tatsache, dass beim kleinsten Gewicht durch systematische Fehler die relative Abweichung am größten ist. Solche Fehler könnten zum Beispiel durch die oben genannten Ursachen oder Reibung im Versuchsaufbau auftreten.

Weiterhin fällt auf, dass der ermittelte Fehler bei der theoretischen Bestimmung des Trägheitsmoments durch die Figurenachse sehr klein ist. Dies ist möglicherweise auf eine zu starke Idealisierung des Kreiselkörpers zurückzuführen. Betrachtet man zum Beispiel die Geometrie des drehenden Körpers, ist zu bemerken, dass dieser keine einfache Zylinderscheibe darstellt, wie angenommen. Die Aufzugsvorrichtung, die Gewindelöcher und der an der Aufhängung ausgesparte Teil wurden bei der Betrachtung vernachlässigt und man kann erwarten, dass das Fehlerintervall ohne diese Vernachlässigung weitere Ergebnisse des Versuchs beinhalten würde.

Im Gegensatz hierzu weist das Trägheitsmoment durch die zur Figurenachse senkrechten Achse einen recht großen Fehler auf. Dieser setzt sich vor allem aus zwei Faktoren zusammen. Zunächst ist zur Bestimmung der Länge des Stabes die Messung von insgesamt sieben Längen notwendig, teilweise mit großen Ungenauigkeiten, da das verwendete Lineal etwa bei Messung von l_5 in einem Abstand von ungefähr 3 cm vom Stab gehalten wurde. Außerdem war eine Messung des Gewichtes des Stabes nicht möglich, da dieser fest im Versuchsaufbau eingebaut ist. Stattdessen wurde die Masse des im Durchmesser gleichen und etwa halb so langen Stabes der Achsenfixierung gemessen. Diese Näherungen führen erwartungsgemäß zu recht ungenauen Ergebnissen, deren Fehler sich dann im Trägheitsmoment fortsetzen.

Entsprechend dieser Ungenauigkeit weicht auch die gemessene Nutationsfrequenz recht stark von der theoretisch vorhergesagten ab. Der erwartete lineare Zusammenhang zwischen Nutations- und Rotationsfrequenz ist trotzdem eindeutig erkennbar.

A Tabellen und Grafiken

Gemessene Größe	I_{\parallel}				
	Präzession				Pendelschwingung
$\Delta I/I_{\parallel, \text{Geom}} [\%]$	10.7	1.4	0.7	4.2	7.3

Tabelle 1: Relative Abweichungen der ermittelten Trägheitsmomente vom aus der Geometrie ermittelten Wert

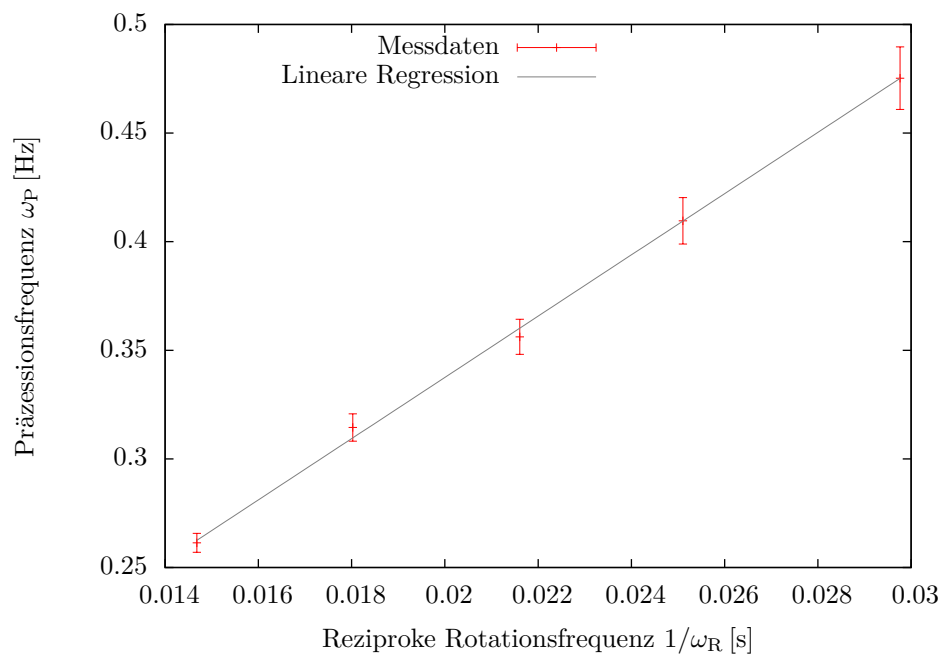
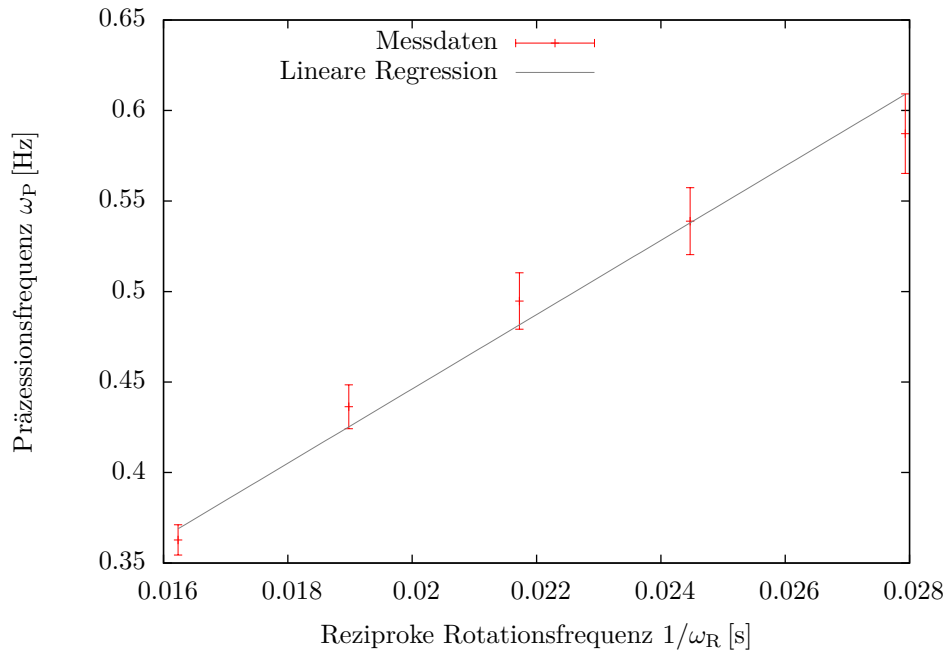
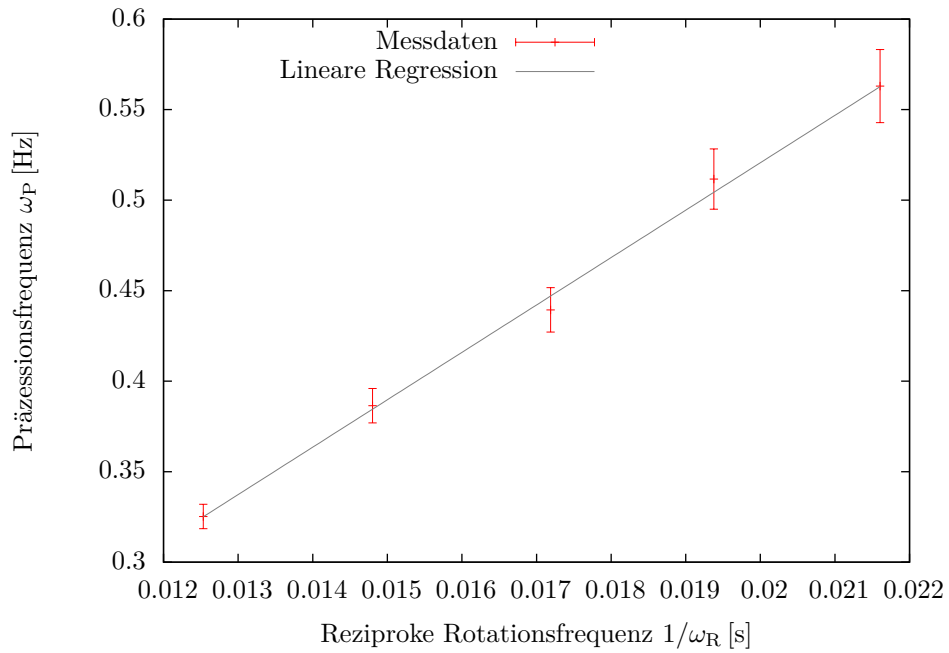


Abbildung 5: Graphische Auftragung der Messdaten für die Präzession, $m = 60$ g

Abbildung 6: Graphische Auftragung der Messdaten für die Präzession, $m = 80$ gAbbildung 7: Graphische Auftragung der Messdaten für die Präzession, $m = 100$ g

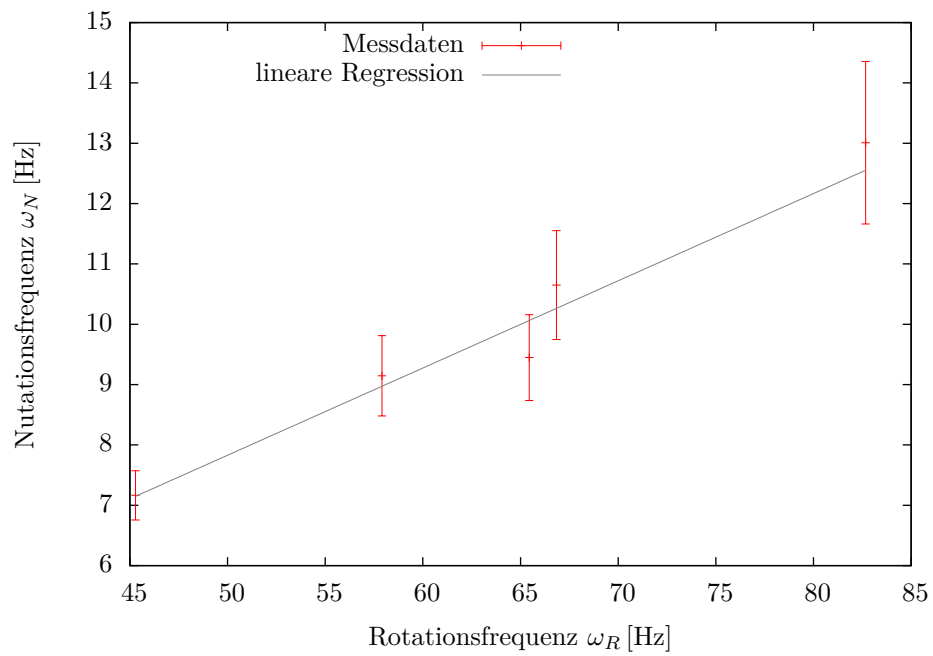


Abbildung 8: Graphische Auftragung der Messdaten für die Nutation

Literatur

- [1] FEYNMAN, Richard P. ; LEIGHTON, Robert B. ; SANDS, Matthew: *The Feynman Lectures on Physics - Volume I: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*. The New Millennium Edition. Basic Books, 2011
- [2] GROSSE-KNETTER, Jörn ; PRIOR, Mira: *LP - Kreiselpräzession*. – URL <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3637>. – Zugriffsdatum: 2012-06-23
- [3] MESCHEDE, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Ausgabe. Springer, 2006
- [4] PAUS, Hans J.: *Physik in Experimenten und Beispielen*. 3. Ausgabe. Hanser, 2007