

12 Die spezifische Elektronenladung e/m_e

Der Quotient aus Ladung e und Masse m_e des Elektrons wird spezifische Elektronenladung e/m_e genannt. Ihre Kenntnis ist für viele Berechnungen notwendig, insbesondere bei bewegten Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern. Diese Naturkonstante e/m_e soll hier bestimmt werden. Erstmals gelang dies Emil Wiechert (1861-1928) in Göttingen (Geophysik) aus der Ablenkung von Kathodenstrahlen fast gleichzeitig mit J.J. Thomson, wobei Letzterer dafür später den Nobelpreis erhielt.

Der Versuch an sich ist relativ einfach und kurz, deshalb soll Wert auf das Aufspüren systematischer Fehler gelegt werden. Darüber hinaus soll man sich mit der Funktionsweise des Oszilloskops beschäftigen, dessen Verständnis insbesondere auch für andere Versuche im Praktikum sehr wichtig ist.

12.1 Stichworte

Spezifische Elektronenladung, Helmholtzspule, Lorentzkraft, homogenes Magnetfeld, Ablenkung von Elektronen im elektrischen Feld, Elektronenstrahlröhre, Oszilloskop, Kathodenstrahlröhre, Fernsehrohr, Massenseparation.

12.2 Literatur

NPP; Walcher; Dem-2; Gerthsen; BS-2; Geschke; Schülerduden, »Die Physik«, Bibliografisches Institut Mannheim [83]; Dorn/Bader, »Physik in einem Band«, Hermann Schroedel Verlag, Hannover [17];

12.3 Zubehör

Bild 12.1 zeigt ein Foto des Versuches mit Zubehör: Fadenstrahlrohr mit Helmholtzspule und verschiebbarer Ablesevorrichtung, Steuerung für Fadenstrahlrohr (im wesentlichen Netzgerät für Kathodenheizung, Wehneltzylinder und Anodenspannung), Netzgerät mit regelbarem Strom für die Helmholtz-Spule, 2-3 Multimeter.

12.4 Grundlagen

Experimentell bedient man sich in den meisten Fällen der *Helmholtz-Spule* zur Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes. Dies ist in Abschnitt 12.9.1 genauer ausgeführt.

Elektronen werden durch Glühemission erzeugt und mit einer elektrischen Spannung beschleunigt. Im Magnetfeld werden sie durch die Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gezwungen.

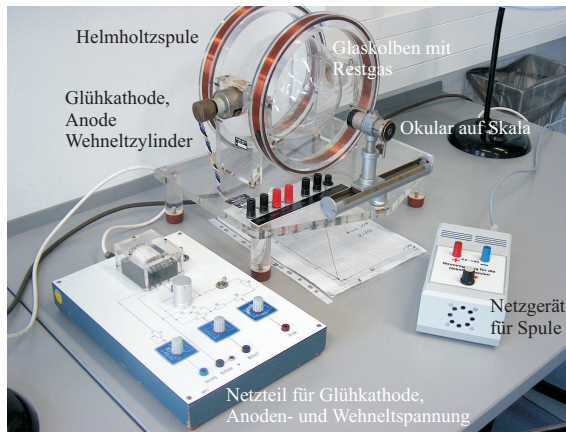


Bild 12.1: Der Versuch »Spezifische Elektronenladung«.

12.5 Fragen

1. Fadenstrahlröhre mit Elektronenkanone:

- Erklären Sie Aufbau und Funktionsweise einer Elektronenkanone mit Wehneltzylinder. Wie sieht ein Schaltplan dazu aus?
- Welche Geschwindigkeit hat ein Elektron nach dem Durchlaufen der Beschleunigungsspannung U_B ?
- Wieso kann der Wehneltzylinder nur begrenzten Erfolg haben?
- Wieso ist der Elektronenstrahl sichtbar ("Fadenstrahlen")?
- Elektronen stoßen sich aufgrund gleicher negativer Ladung ab. Wieso verschmiert der Elektronenstrahl trotzdem nicht zur Unkenntlichkeit (Gasfokussierung; Kanal aus Ionen)?

2. Helmholtz-Spulen:

- Helmholtzspulen mit jeweils n Windungen, die im Abstand ihres Radius R stehen und vom Strom I durchflossen werden, erzeugen ein homogenes Magnetfeld der Stärke

$$B_O = \mu_0 \mu_r \frac{8}{\sqrt{125}} \cdot \frac{nI}{R}. \quad (12.1)$$

Diese Formel gilt allerdings nur näherungsweise. Wo gilt sie exakt und wie sieht qualitativ der Feldlinienverlauf in einem Querschnitt durch beide Spulenmittelpunkte aus?

- Bestimmen Sie die Größe des Magnetfeldes relativ zu demjenigen im Mittelpunkt auf der \vec{e}_r - und \vec{e}_z -Achse, also $B(r=0, z)/B_O$ bzw. $B(r, z=0)/B_O$ (vgl. Bild 12.2). Für einen ganz groben Überblick reicht es, die Werte an den Positionen $\frac{R}{2}$ und R auf der \vec{e}_r -Achse bzw. $\frac{R}{4}$ und $\frac{R}{2}$ auf der \vec{e}_z -Achse zu bestimmen (vgl. 12.9.1).
- Was bedeutet das für den Versuch?
- Stellen Sie bitte das Magnetfeld der Helmholtzspule des Versuches für die Elektronenkreisbahn, d.h. auf der Schnittebene zwischen beiden Spulen, in geeigneter Weise und anschaulich grafisch dar (2D, 3D, Konturplot). Die benötigten Formeln sind alle im Text angegeben. (vgl. auch hier 12.9.1).

3. Bewegte Ladungen in magnetischen Feldern:

- Welche Kraft \vec{F} wirkt auf eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Ladung in einem beliebigen magnetischen Feld \vec{B} (Lorentzkraft)?
- Wie lässt sich die Bahn eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld beschreiben? Welche Vereinfachung ergibt sich, wenn man annimmt, dass die Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 senkrecht zum magnetischen Feld \vec{B} steht?

4. Ladungen in elektrischen Feldern:

- Welche Kraft \vec{F} wirkt auf eine Ladung in einem beliebigen elektrischen Feld \vec{E} ? Wie lässt sich die Bahn eines Elektrons beim Durchfliegen eines Plattenkondensator bei parallelem Einschuss relativ zu den Platten beschreiben?

5. Braunsche Röhre/(Kathodenstrahl-)Oszilloskop:

- Skizzieren Sie Aufbau (Skizze) und Funktionsweise einer Braunschen Röhre.
- Welche Spannung $U_x(t)$ mit welcher Frequenz muss an den horizontalen Ablenkkondensator angelegt werden, um eine beliebige periodische Spannung $U(t)$ mit der Periodendauer T auf dem Bildschirm darstellen zu können?
- Was ist *Triggerung*?

12.6 Durchführung

12.6.1 Hinweise zur Durchführung

- Die Spannung am Wehneltzylinder sollte man sich mit einem Messgerät anzeigen lassen.
- Zur Schonung der Röhre müssen die Potenziometer für Kathodenheizung und Anodenspannung beim Einschalten auf Null stehen. Die Heizung muss langsam erhöht werden und die Anodenspannung soll erst eingeschaltet werden, wenn der Kathodenzyylinder rotglühend ist.
- Der Spulenstrom darf 1 A nicht überschreiten.
- Man achte auf korrekte Justierung der Ablesevorrichtung (Höhe!).
- Normalerweise wird bei jeder Bestimmung des Durchmessers d die linke und rechte Begrenzung des Kreises gemessen. Man kann sich auch überlegen, ob es ausreicht, eine Begrenzung (in unseren Fall die linke) sehr genau zu messen und als fest anzunehmen. Dabei ist in Betracht zu ziehen, dass die Fadenstrahlröhre nicht völlig fest mit dem Gestell verbunden und somit insbesondere auch eine Verschiebung relativ zur Ablesevorrichtung möglich wäre (z.B. beim Verschieben der Apparatur, oder bei Erschütterungen).
- Man achte auf Konstanz von Anodenspannung und Spulenstrom, gegebenenfalls ist nachzuregeln.

12.6.2 Durchführung

1. Die spezifische Elektronenladung wird bestimmt aus den eingestellten Parametern Beschleunigungsspannung U_B und Spulenstrom I , sowie dem gemessenen Wert des Durchmessers $d = d(U_B, I)$. Vor dem Einschalten der Apparatur die »Hinweise zur Durchführung« beachten!
2. Zunächst überprüfe man in einem groben Raster (z.B. U_B in Schritten von 20 V, I in Schritten von 0,1 A), welche Durchmesser überhaupt messbar sind.
3. Man wähle mindestens zwei Spulenströme mit möglichst großen Bereichen für U_B und umgekehrt mindestens zwei Beschleunigungsspannungen mit möglichst großen Bereichen für I , in denen der Durchmesser messbar ist. Dann wird unter Festhaltung des einen einstellbaren Parameters in Abhängigkeit des zweiten einstellbaren Parameters der Durchmesser bestimmt. Diese Methode ist sinnvoll um später systematische Fehler erkennen zu können. Insgesamt sollten etwa 25 Durchmesser $d = d(U_B, I)$ bestimmt werden.
4. Notieren Sie bitte die Mess- und Ablesefehler sowie die Spulendaten.

12.7 Angaben

Spulendaten: Radius $R = 12,2$ cm; Windungen $n = 200$ (pro Spule).

12.8 Auswertung

1. Die einzelnen Berechnungsschritte sollten beschrieben und die Einzelwerte (U , I , d , e/m_e) übersichtlich dargestellt werden.
2. Berechnung der spezifischen Elektronenladung e/m_e für alle Wertepaare
3. In der Auswertung sollte auf eine exakte Fehlerrechnung geachtet werden.
4. Für eine Diskussion möglicher systematischer Fehler bietet es sich an, die ermittelten $\frac{e}{m_e}$ -Werte in Abhängigkeit vom Radius grafisch darzustellen.
5. Für ein Wertepaar nehmen Sie e/m_e als gegeben an und berechnen sie die Flußdichte B aus den Messwerten und vergleichen Sie das Ergebniss mit dem theoretisch erwarteten.

12.9 Bemerkungen

12.9.1 Grundlegende Informationen zu Helmholtzspulen

Helmholtzspulen sind zwei parallele Leiterschleifen mit Radius R , die im Abstand ihres Radius stehen. Für Interessierte soll hier ein Weg beschrieben werden, wie das Magnetfeld berechnet werden kann. Die wichtigen Ergebnisse sind hier zusammengefasst.

Für die mathematische Beschreibung wählen wir in Zylinderkoordinaten den Koordinatenursprung so, dass die beiden Leiterschleifenmittelpunkte jeweils gleich weit von ihm entfernt sind,

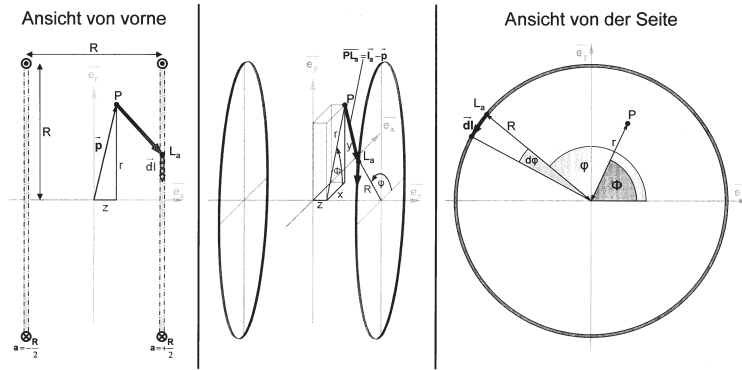


Bild 12.2: Helmholtzspule schematisch.

sie liegen also bei $a = \pm \frac{R}{2}$ auf der \vec{e}_z -Achse. (Warum der Abstand zwischen den Leiterschleifen gerade R sein sollte, kann in Greiner, »Klassische Elektrodynamik« nachgelesen werden).

Wir wollen nun das Magnetfeld in einem beliebigen Punkt P , der durch seinen Ortsvektor \vec{p} beschrieben sei, bestimmen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{p}(x, y, z) = \vec{p} = \vec{p}(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

Dazu müssen wir die Leiterschleifen parametrisieren.

$$\vec{\ell}_a(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ a \end{pmatrix}_{\varphi=0}^{2\pi} \quad d\vec{\ell}(\varphi) = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi d\varphi \\ R \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a = \pm \frac{R}{2} \quad (12.3)$$

Für das Magnetfeld im Punkt P ergibt sich also mit dem Biot-Savartschen Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{p}) = \vec{B}_{-\frac{R}{2}}(\vec{p}) + \vec{B}_{+\frac{R}{2}}(\vec{p}) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{\vec{\ell}_{-\frac{R}{2}} - \vec{p}}{|\vec{\ell}_{-\frac{R}{2}} - \vec{p}|^3} \times d\vec{\ell} + \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{\vec{\ell}_{+\frac{R}{2}} - \vec{p}}{|\vec{\ell}_{+\frac{R}{2}} - \vec{p}|^3} \times d\vec{\ell} \quad (12.4)$$

Vorüberlegungen

Wir betrachten zunächst nur *eine* Leiterschleife im Abstand a zum Koordinatenursprung und bestimmen einige Hilfstern:

$$(\vec{\ell}_a - \vec{p}) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi - R \cos \varphi \\ r \sin \phi - R \sin \varphi \\ z - a \end{pmatrix}$$

$$|\vec{\ell}_a - \vec{p}| = \sqrt{(r \cos \phi - R \cos \varphi)^2 + (r \sin \phi - R \sin \varphi)^2 + (z - a)^2} \quad (12.5)$$

$$= \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\phi - \varphi) + (z - a)^2} \quad (12.6)$$

$$(\vec{\ell}_a - \vec{p}) \times d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} r \cos \phi - R \cos \varphi \\ r \sin \phi - R \sin \varphi \\ z - a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \varphi d\varphi \\ R \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(z-a) \cos \varphi d\varphi \\ R(z-a) \sin \varphi d\varphi \\ (R^2 - Rr \cos(\phi - \varphi)) d\varphi \end{pmatrix}$$

Mit dem Biot-Savartschen Gesetz erhalten wir nun für das Magnetfeld im Punkt P, das durch eine Leiterschleife erzeugt wird:

$$\vec{B}_a(\vec{p}) \begin{pmatrix} B_{\vec{e}_r, a}(\vec{p}) \\ B_{\vec{e}_\phi, a}(\vec{p}) \\ B_{\vec{e}_z, a}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{\vec{\ell}_a - \vec{p}}{|\vec{\ell}_a - \vec{p}|^3} \times d\vec{\ell}_a \quad (12.7)$$

Für die Komponente in \vec{e}_z -Richtung erhalten wir:

$$\begin{aligned} B_{\vec{e}_z, a}(\vec{p}) &= \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - rR \cos(\phi - \varphi)) d\varphi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos(\phi - \varphi) + (z - a)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} I \frac{\left((r+R)^2 + (z-a)^2 \right) K(k) - \left(r^2 - R^2 + (z-a)^2 \right) E(k)}{\sqrt{(r-R)^2 + (z-a)^2} \left((r+R)^2 + (z-a)^2 \right)} \\ \text{mit} \quad k^2 &= k^2(r, z, R, a) = \frac{-4rR}{(r-R)^2 + (z-a)^2} \end{aligned}$$

Dabei sind $K(k)$ und $E(k)$ die vollständigen elliptischen Integrale erster bzw. zweiter Art (s.u.).

Wie aufgrund der Rotationssymmetrie zu erwarten war, ist das Magnetfeld tatsächlich unabhängig von ϕ , d.h.:

$$B_{\vec{e}_z, a}(\vec{p}) = B_{\vec{e}_z, a}(r, \phi, z) = B_{\vec{e}_z, a}(r, z)$$

Im folgenden betrachten wir wieder beide Leiterschleifen und das von beiden erzeugte Magnetfeld im Punkt P:

$$\vec{B}(\vec{p}) = \vec{B}_{-\frac{R}{2}}(\vec{p}) + \vec{B}_{+\frac{R}{2}}(\vec{p})$$

bzw. seine Komponente in \vec{e}_z -Richtung:

$$B_{\vec{e}_z}(\vec{p}) = B_{\vec{e}_z, -\frac{R}{2}}(\vec{p}) + B_{\vec{e}_z, +\frac{R}{2}}(\vec{p})$$

Außerdem gehen wir von den Leitschleifen zu Spulen mit n Windungen über. Dazu müssen wir die Formeln nur mit dem Faktor n erweitern.

Elliptische Funktionen

Die Funktionen

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{-1/2} d\alpha \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} d\alpha$$

heißen vollständig elliptische Integrale erster bzw. zweiter Art. Sie sind in Bild 12.3 dargestellt.

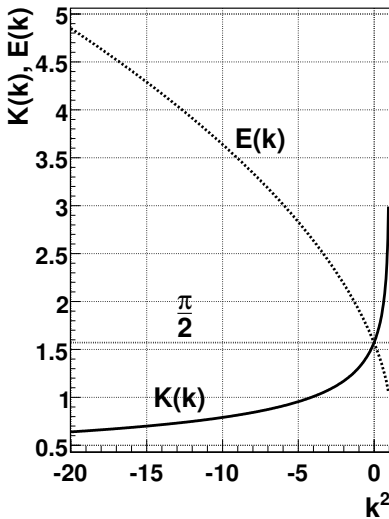


Bild 12.3: Elliptische Integrale $K(k)$ und $E(k)$.

Magnetfeld auf der \vec{e}_z -Achse

Betrachten wir zunächst das Magnetfeld auf der \vec{e}_z -Achse. Aufgrund der Rotationssymmetrie ergibt sich sofort, dass das Feld nur eine Komponente in \vec{e}_z -Richtung haben kann, d.h. $\vec{B}(r=0, z) = B_{\vec{e}_z}(r=0, z) \cdot \vec{e}_z$. Dafür gilt:

$$B_{\vec{e}_z}(r=0, z) = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r n I R^2 \left[\left(R^2 + \left(z - \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left(R^2 + \left(z + \frac{R}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \quad (12.8)$$

Magnetfeld in Radialrichtung bei $z = 0$

Betrachten wir nun das Magnetfeld in Radialrichtung bei $z=0$, also in der x-y-Ebene. Aufgrund der Rotationssymmetrie und der Spiegelsymmetrie um die x-y-Ebene ergibt sich sofort, dass das

Feld nur eine Komponente in \vec{e}_z -Richtung haben kann, d.h. $\vec{B}(r, z=0) = B_{\vec{e}_z}(r, z=0) \cdot \vec{e}_z$. Dafür gilt:

$$B_{\vec{e}_r}(r, z=0) = \frac{2}{\pi} \mu_0 \mu_r n I \frac{(4r^2 + 8rR + 5R^2) K(k) - (4r^2 - 3R^2) E(k)}{\sqrt{4r^2 - 8rR + 5R^2} (4r^2 + 8rR + 5R^2)} \quad (12.9)$$

mit

$$k^2 = \frac{16rR}{8rR - 4r^2 - 5R^2} \quad (12.10)$$

Dabei sind $K(k)$ und $E(k)$ die oben genannten vollständigen elliptischen Integrale.

Magnetfeld im Mittelpunkt

Damit ergibt sich für das Magnetfeld im Mittelpunkt zwischen den beiden Spulen:

$$B_O = B_{\vec{e}_z}(r=0, z=0) = B_{\vec{e}_r}(r=0, z=0) = \frac{8}{\sqrt{125}} \mu_0 \mu_r \frac{nI}{R} \quad (12.11)$$