4 Kreiselpräzession

Aufgabe dieses Versuches ist die Vermittlung der Bewegungsgleichungen starrer rotierender Körper. Insbesondere die Präzession eines Kreisels soll im Rahmen dieses Versuches gemessen werden. Interessante Anwendungen ergeben sich in der Himmelsmechanik, so zum Beispiel in der Äquinoktien-Präzession der Erdachse oder dem Saros-Zyklus von Sonnen-und Mondfinsternissen.

4.1 Stichworte

Kreisel, Präzession der Drehimpulsachse des Kreisels, Nutation, Drehmoment, Drehimpuls, Winkelgeschwindigkeit, Trägheitsmoment, Physikalisches Pendel.

4.2 Literatur

Gerthsen, S.79ff.; BS-1, S.205ff; H. Goldstein, Klassische Mechanik, S.173ff. [27]; Dem-1.

4.3 Zubehör

Der Versuch mit Zubehör ist in Bild 4.1 dargestellt.

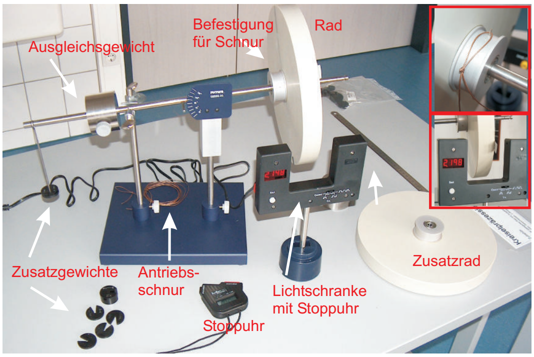

Bild 4.1: Der Versuch »Kreisel« mit Zubehör: Kreisel (gelagertes Rad mit Ausgleichsgewicht), Zusatzgewichte, Antriebsschnur, 1 Stoppuhr, 1 Lichtschranke mit Stoppuhr, Zusatzrad.

4.4 Grundlagen

4.4.1 Theorie

Als Kreisel bezeichnet man einen sich drehenden Körper, welcher nur an einem Punkt mit völliger Drehfreiheit festgehalten wird. Er besitzt also 3 Freiheitsgrade der Rotation, welche gewöhnlich in Form der Eulerschen Winkel beschrieben werden. Die Bewegung eines starren rotierenden

Körpers wird durch die Eulersche Kreiselgleichung beschrieben:

$$\left(\frac{\partial \vec{L}}{\partial t}\right)_{\text{Raum}} = \left(\frac{\partial \vec{L}}{\partial t}\right)_{\text{Körper}} + \vec{\omega} \times \vec{L}. \tag{4.1}$$

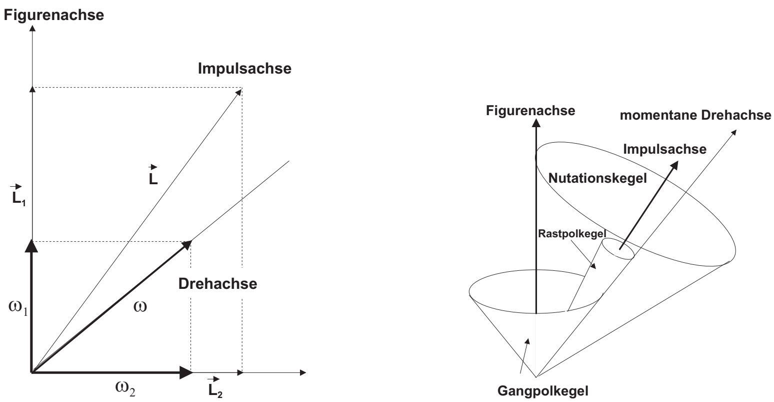

Bild 4.2: Kreisel schematisch: (Links) Festlegung der drei Kreiselachsen; (Rechts) Die drei Kegelflächen der Achsenbewegung.

Gegenüber der herkömmlichen Bewegungsgleichung der Rotation wird in diesem Fall der Transformation vom körpereigenen Bezugssystem in das raumfeste Bezugsystem Rechnung getragen. Der zusätzlich auftretende Term wird oft Coriolis-Term genannt. Dieser trägt Veränderungen im Bezug auf die Drehachse des Systems Rechnung. Ein Beispiel sind rotierende Luftmassen in Tief- und Hochdruckgebieten.

Man unterscheidet drei verschiedene Bewegungsachsen eines Kreisels: Zum einen dreht sich der Kreisel um seine *Figurenachse*, zumeist einer Symmetrie- und Hauptträgheitsachse des Körpers. Wirken nun Stöße auf den Körper ein, so verbleibt die Figurenachse nicht raumfest, sondern vollführt eine Bewegung auf dem Mantel des so genannten *Nutationskegels*. Dementsprechend ist die Figurenachse nicht mehr identisch mit der *momentanen Drehachse* des Kreisels. Diese bewegt sich ebenfalls auf einem Kegel, dem so genannten *Rastpolkegel*, um die raumfeste *Impulsachse*. Letztere ist auch Mittelachse des Nutationskegels. Rollt die Figurenache nun auf dem Nutationskegel ab, kann dies durch ein Abrollen eines Kegels um die Figurenachse, dem so genannten *Gangpolkegel*, auf dem Rastpolkegel interpretiert werden.

Wird nun ein Drehmoment $\vec{T}$ senkrecht zur Drehimpulsachse auf den Kreisel ausgeübt, so kann dieses nur die Richtung des Drehimpulses $\vec{L}$ ändern, nicht aber den Betrag des Drehimpulses. Das Ergebnis dieses Drehmomentes ist daher eine *Präzessionsbewegung* der Drehimpulsachse zu einer Achse senkrecht zum Drehmoment.

$$\vec{T} = \vec{\omega}_P \times \vec{L} \tag{4.2}$$

Somit folgt für den Betrag der Präzessionsgeschwindigkeit ω_P

$$\omega_P = \frac{T}{L \cdot \sin\theta} \tag{4.3}$$

4.4.2 Versuchsaufbau

Den Kreisel stellt in diesem Fall ein Rad dar, welches auf einer Achse am Schwerpunkt von Rad und Achse aufgehängt ist. Am Ende der dem Rad abgewandten Seite kann durch Zusatzgewichte ein Drehmoment auf den Kreisel ausgeübt werden, welche den Kreisel auf der Drehachse präzedieren lassen.

Wichtig: Der Kreisel muss vorsichtig von Hand in die Präzessionbewegung eingeführt werden, um eine zu starke Nutation der Figurenachse zu verhindern.

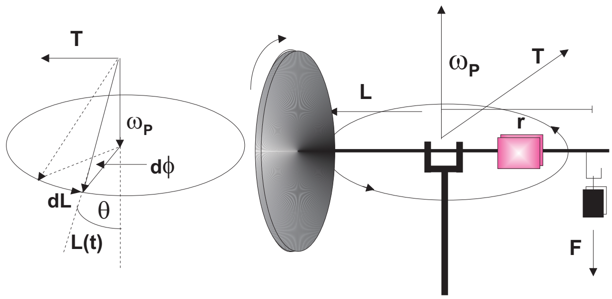

Bild 4.3: Versuchsskizze des Kreisels und eine schematische Darstellung der Vektoren von Drehimpuls, Drehmoment und Präzessionsgeschwindigkeit.

4.5 Fragen

1. Berechnen Sie bitte für diese Anordnung die Formel für die Präzessionsgeschwindigkeit ω_P aus der Drehfrequenz des Rades, dem Trägheitsmoment um die Figurenachse und dem Drehmoment des Zusatzgewichtes. Warum fällt der Neigungswinkel θ zwischen Figurenachse und Präzessionsachse aus der Formel heraus?
2. Leiten Sie bitte anhand der Zeichnung in Bild 4.3 die Formel für die Präzessionsgeschwindigkeit her.
3. Wenn Sie sich auf einem rotierenden Körper bewegen, wirken weitere Kräfte. Beschreiben und quantifizieren Sie die CORIOLIS-Kraft. Welche Auswirkungen hat das auf der Erde und welche wichtigen Effekte beruhen auf der Coriolis-Kraft?

4.6 Weiterführendes

1. Schauen Sie sich bitte die Herleitung der Eulerschen Gleichungen aus den herkömmlichen Bewegungsgleichungen an (z.B. H. Goldstein S. 173ff. [27]).
2. Äquinoktien-Präzession (Für Interessierte): Der prominenteste Kreisel ist die Erde. Ihre Figurenachse (Polachse) ist um 23,4° zur Senkrechten der Ekliptik geneigt. Die Erde ist keine perfekte Kugel, sondern an den Polen leicht abgeplattet ($I_1 \neq I_3$). Somit können Sonne und Mond Drehmomente auf diesen Kreisel ausüben. Wieso eigentlich? Welcher Einfluss ist

stärker? Womit kann dieses Drehmoment verglichen werden? Die Erdachse präzessiert mit einer Periode von 25 800 a (sog. PLATONisches Jahr) um die Senkrechte zur Ekliptik. Das Drehmoment auf die Erdachse lässt sich (in erster Näherung) folgendermaßen ausdrücken:

$$T = \frac{3}{4}\gamma(I_1 - I_3)\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right)\left[\frac{M_S}{R_S^3} + \frac{M_L}{R_L^3}\right]. \tag{4.4}$$

Mond und Sonne können als über ihre Bahn verschmiert angesehen werden, die Erde wird vereinfacht als Kugel mit Gürtel am Äquator dargestellt. Man entwickle nach Potenzen von $\frac{R_E}{R_{S,L}}$. Berechnen Sie hieraus den Deformationsparameter β der Erde

$$\beta = \frac{I_1 - I_3}{I_3} \tag{4.5}$$

und vergleichen Sie diesen mit dem Literaturwert ($\beta = 0{,}003\,27$). Welche Fehlerquellen hat diese Berechnung? Woher rührt der Name dieser Präzession?

Tabelle 4.1: Astronomie: Benötigte Werte der Massen und Entfernungen.

Masse		Abstand	
Sonnenmasse: M_S	2×10^{30}kg	Erde-Sonne: R_S	1.5×10^{11} m
Mondmasse: M_L	7.4×10^{22} kg	Erde-Mond: R_L	3.8×10^{8} m

3. Die Rotationsgeschwindigkeit der Erde war im Laufe der Jahrtausende nicht konstant, sondern es gibt leichte Abweichungen. Welche Ursache könnten diese Schwankungen haben? Wie kann man diese Schwankungen (ansatzweise) experimentell bestimmen?

4.7 Durchführung

1. Der Kreisel (das Rad) ist einzuspannen und mit Hilfe des Zusatzgewichtes (in Gewindeloch eindrehen) als physikalisches Pendel zu gestalten. Die Schwingungsdauer ist über 10 Perioden mehrfach mit einer Stoppuhr zu messen (mindestens 3 Messungen). Wiederholen Sie diese Messung an der diametral gegenüberliegenden Stelle.

2. Notieren Sie die Masse des Zusatzgewichts.[1]

3. Die Einspannung wird entfernt. Das Rad ist ohne zusätzliche Gewichte durch Verschieben des Ausgleichsgewichtes auf horizontale Gleichgewichtslage zu justieren. Messen Sie den Abstand des Ausgleichgewichtes vom Unterstützungspunkt und notieren Sie seine Masse. Am äußeren Rand des Rades wird ein ca. 1-2 cm rausragender Papierstreifen für die Lichtschranke angebracht. Machen Sie sich mit den Einstellungen und der Wirkungsweise der Lichtschranke vertraut. Messen Sie den Abstand der Kerbe für das Zusatzgewicht von der Drechachse.

1 Wer besonders genau sein will, kann auch die Analysewaagen beim Versuch »Dia- und Paramagnetismus« zur nochmaligen Messung verwenden.

4. Der Kreisel wird mit der Aufzugsschnur in schnelle Rotation versetzt. Mit der Lichtschranke messen Sie die Rotationsperiode T_R (und damit die Drehgeschwindigkeit ω_R) des Rades. Hängen Sie ein Zusatzgewicht m_z (10-60 g) an die freie Achse des Kreisels und messen dann die Präzessionsfrequenz ω_P durch Messen eines halben Umlaufs mit der Stoppuhr ($^1/_2 T_P$).[2] Hängen Sie das Zusatzgewicht ab und messen Sie erneut die Rotationsperiode des Rades T_R. Das Rad sollte langsamer geworden sein. Hängen Sie wieder das gleiche Gewicht an und messen die Präzession. Wiederholen Sie dies viermal. Es ist wichtig, dass das Rad ungestört weiterläuft und dass Sie diese Messung aufgrund der Reibung zügig durchführen.

5. Wiederholen Sie den vorherigen Punkt für 2 weitere unterschiedliche Gewichte.

6. Der Kreisel wird mit der Aufzugsschnur in schnelle Rotation versetzt. Mit der Lichtschranke messen Sie die Rotationsperiode T_R (Drehgeschwindigkeit ω_R) des Rades. Geben Sie der Achse einen kräftigen Stoß und messen Sie die Nutationsperiode T_N mit der Stoppuhr. Danach messen Sie wieder die Rotationsperiode gefolgt von einem erneuten Stoß zur Nutation. Dies drei mal wiederholen.

7. Notieren Sie alle benötigten Daten (Rad, Gewichte, Abstände, usw.).

4.8 Angaben

Einige Angaben sind am Versuchsplatz ausgelegt. Bitte notieren.

4.9 Auswertung

1. Berechnen Sie aus den Angaben das Trägheitsmoment des Rades um die horizontale Achse und um die vertikale Achse.

2. Man berechne das Trägheitsmoment des Kreisels aus Messung 1 und 2. (Siehe auch Versuch 3 »Trägheitsmomente«.)

3. Für die Messungen 4 und 5 tragen Sie die Präzessionsfrequenz ω_P gegen die reziproke Rotationsfrequenz ω_R auf. Für ω_R kann mit dem Mittelwert vor und nach der Präzession gerechnet werden. Für jedes Gewicht berechnen Sie daraus bitte das Trägheitsmoment des Rades.

4. Vergleichen Sie die Ergebnisse für das Trägheitsmoment.

5. Für Messung 6 tragen Sie die Nutationsfrequenz ω_N gegen die jeweilige Rotationsfrequenz ω_R auf. Es zeigt sich ein linearer Zusammenhang. Können Sie die sich ergebende Konstante auf Eigenschaften des Kreisels zurückführen?

4.10 Bemerkungen

Beim Anwerfen des Kreisels ist die Achse festzuhalten oder einzuspannen. Der Kreisel ist vorsichtig mit der Hand in die Präzessionsbewegung einzuführen.

2 Die Einspannstange kann hierzu gut als Anhaltspunkt dienen.