3 Das Trägheitsmoment

Drehbewegungen jeglicher Art spielen im Alltag eine sehr große Rolle, man denke z.B. daran, dass sämtliche Fortbewegungsmittel direkt oder indirekt auf Drehbewegungen von Rädern, Wellen, Propellern etc. beruhen. In diesem Versuch wird das Trägheitsmoment Θ als zentrale Größe der Drehbewegungen (vergleichbar mit der Masse in der linearen Mechanik) auf zwei verschiedene Weisen bestimmt. Der anschließende Kreiselversuch ergänzt diesen Themenkreis der Rotationsmechanik, indem er die Drehbewegung für eine frei bewegliche Drehachse behandelt. Im Falle des Kreisels gibt es zwar keine feste Drehachse, es gibt aber in dem betrachteten Körper einen raumfesten Punkt, so dass man abgekürzt von einer Drehbewegung bei festem Punkt sprechen kann.

3.1 Stichworte

Trägheitsmoment, Drehmoment, Winkelrichtgröße, Steinerscher Satz, Trägheitsellipsoid, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, physikalisches Pendel, beschleunigte Masse

3.2 Literatur

NPP: 8; BS-1: Kap. III; Gerthsen, Wap: 2.7; Budo: Theoretische Mechanik [6]; Goldstein: Klassische Mechanik [27]; Kuypers: Theoretische Mechanik [54]; Dem-1.

3.3 Zubehör

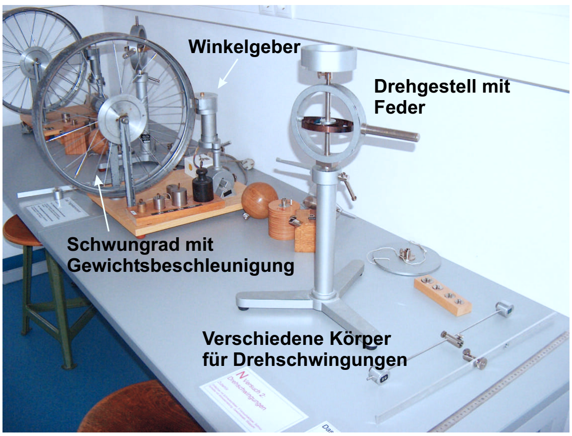

Bild 3.1: Versuch Messung von Trägheitsmomenten verschiedener Körper.

Bild 3.1 zeigt ein Foto des Versuches mit Zubehör: Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen: Gestell mit Drillachse, Scheibe mit Gradeinteilung, Gewichtssatz, 7 Versuchskörper, Schieblehre, Maßstab, Stoppuhr. Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung: Rad, Registrierpapier, Gewichtssatz, Zusatzgewicht, Zeitmarkengeber (Taktfrequenz 10 Hz), Stoppuhr.

Bild 3.2a zeigt die Anordnung in der Aufsicht. Eine Spiralfeder verbindet die zentrale feste Achse mit einem drehbar gelagerten flachen Hohlzylinder, der als Träger für die Probekörper dient. Nach Auslenkung aus der Ruhelage beobachtet man Drehschwingungen des Systems aus Hohlzylinder und Probekörper. Bild 3.2b zeigt die Anordnung in der Seitenansicht. Ein an einem Faden befestigter fallender Körper der Masse m setzt über ein kleines Rad ein großes Rad in Bewegung, das mit Registrierpapier belegt ist. Ein umlaufender Draht dient als Zeitmarkengeber, der in Abständen von 0,1 s eine Markierung auf das Registrierpapier zeichnet.

3.4 Grundlagen

Die Durchführung des Versuches ist in Bild 3.2 nochmals schematisch veranschaulicht. Theoretische Grundlagen des Versuches sind die Definition des Drehimpulses $\vec{L}$ für ein System von Massenpunkten mit den Ortsvektoren $\vec{r}_i$ und den Impulsen $\vec{p}_i$ im Laborsystem

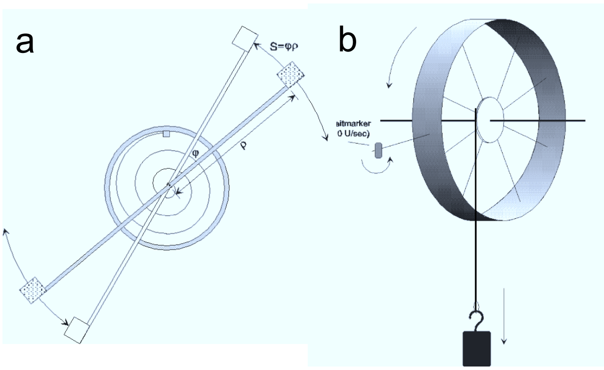

Bild 3.2: Drehschwingung und Winkelbeschleunigung schematisch: a) Trägheitsmoment aus Drehschwingungen in der Draufsicht, b) Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung in der Seitenansicht.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{3.1}$$

und die Kreiselgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{L}} = \vec{M}\,, \tag{3.2}$$

die die zeitliche Ableitung des Drehimpulses $\dot{\vec{L}}$ mit dem Drehmoment $\vec{M}$ verknüpft. Wir nehmen an, dass die Massenpunkte zu einem starren Körper gehören und ein Punkt dieses Körpers im Raum (Laborsystem) festliegt. Dann gibt es stets eine momentane Drehachse, die sich aber im Allgemeinen sowohl im Raum als auch in Bezug auf die inneren Koordinaten des Körpers verlagern kann. Mit diesen Voraussetzungen kann man leicht zeigen, dass die Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$

der Massenpunkte im raumfesten System gegeben sind durch:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \,, \tag{3.3}$$

wobei $\vec{\omega}$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist, und $\vec{r}_i$ der Ortsvektor der Massenpunkte im körperfesten System. Setzt man (3.3) in (3.1) ein, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, welches nach Transformation auf die Hauptachsen die folgende Form annimmt:

$$L_A = \Theta_A \omega_A \quad ; \qquad L_B = \Theta_B \omega_B \quad ; \qquad L_C = \Theta_C \omega_C \,. \tag{3.4}$$

Die Größen L_A, L_B und L_C sind die Komponenten des Drehimpulses bezüglich der Hauptträgheitsachsen, und ω_A, ω_B und ω_C die Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit. Im Teil A »Trägheitsmoment aus Drehschwingungen« steht eine der Hauptträgheitsachsen (z.B. C) des Probekörpers senkrecht auf der Drehachse, so dass $\omega_C \equiv 0$ ist. Dann kann man das Skalarprodukt aus $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ in der Form

$$\Theta \omega^2 = \vec{L} \cdot \vec{\omega} = \Theta_A \omega_A^2 + \Theta_B \omega_B^2 \tag{3.5}$$

schreiben. Mit $\omega_A = \omega \cos\alpha$ und $\omega_B = \omega \cos\beta$ ergibt sich aus (3.5) die Gleichung einer Ellipse in der Form

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \tag{3.6}$$

mit $\Theta_A = \frac{1}{a^2}$, $\Theta_B = \frac{1}{b^2}$, $\xi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\Theta}}$, $\eta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\Theta}}$.

3.5 Fragen

1. Erläutern Sie die Analogien in den Observablen und den Bewegungsgleichungen für Translations- und Rotationsbewegungen.
2. Wie ist das Trägheitsmoment definiert? Leiten Sie den STEINERschen Satz her.
3. Was ist ein Trägheitsellipsoid?
4. Wie berechnet man mit Hilfe der Winkelrichtgröße D das Trägheitsmoment?
5. Wie kann man über das Drehmoment das Trägheitsmoment eines Körpers berechnen?
6. Wie lautet die Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels für kleine Auslenkungen?
7. Leiten Sie die Formeln für das Trägheitsmoment von Kugel, Zylinder, Hohlzylinder, Scheibe, Stab, Hantelkörper sowie Würfel her. Gehen Sie von einer Rotation um die jeweilige Symmetrieachse aus und für den Würfel zusätzlich von einer Rotation um eine Raumdiagonale.

3.6 Durchführung

3.6.1 Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen

1. Als erstes müssen verschiedene Größen gemessen werden, die als Körpereigenschaften in die Auswertung eingehen: Radius der Kugel (z.B. kann der Umfang mit Hilfe eines Seiles

gemessen werden, daraus dann der Radius), des Zylinders und der Scheibe, innerer und äußerer Radius des Hohlzylinders, Abstand der Hantelkörper, Kantenlänge des Würfels, Länge des Stabes und Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt.

2. Der Halter wird so eingespannt, dass die Drillachse horizontal liegt. Um die Winkelrichtgröße zu bestimmen, wird nun die Größe des Winkelausschlags in Abhängigkeit verschiedener angreifender Drehmomente, also verschiedener angehängter Gewichte, gemessen. Dieses soll sowohl für ein Drehmoment nach rechts, als auch diametral für ein Drehmoment nach links bestimmt werden. Die Spiralfeder soll nicht an das Gestell anstossen.[1]

3. Bei vertikaler Lage der Drillachse wird für die verschiedenen Versuchskörper die Schwingungsdauer der Drehschwingungen gemessen (für 10 bis 20 Schwingungen, je dreimal). Beim Würfel soll dies sowohl für die Drehachse durch die Flächenmitte, als auch für die Achse durch die Ecken geschehen, beim Stab für zwei parallele Achsen, von denen die eine nicht durch den Schwerpunkt geht. Auch hier darf die Spiralfeder bei großen Auslenkungen nicht an das Gestell schlagen!

4. Zusätzlich wird ein *Tischchen*-förmiger Körper vermessen. Sein Trägheitsmoment ist durch eine drehbare Vorrichtung veränderbar. Es wird die Schwingungsdauer für verschiedene, um bekannte Winkel gegeneinander verdrehte Rotationsachsen bestimmt (15°-Schritte).

Zu messenden Größen: Alle unter 1. angeführten Größen, Winkelausschlag für 6 verschiedene Massen und zwei Richtungen, Schwingungsdauern für 8 verschiedene Körper, Massen der verschiedenen Körper (messen!), Schwingungsdauern des Tischchen für verschiedene Winkel (alle 15°).

3.6.2 Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung

1. Durch herabfallende Massen von 0,1, 0,2, 0,5 und 1 kg wird das Rad mit Hilfe des Bindfadens in beschleunigte Drehbewegung versetzt. Gleichzeitig zeichnet der Markengeber in zeitlichem Abstand von 0,1 s Zeitmarken auf das Registrierpapier. Vor der Messung sollte der Abstand des Markengebers so eingestellt werden, dass er an jeder Stelle des Rades deutlich sichtbare Striche auf das Papier zieht. Nach jeder Messung wird der Zeitmarkengeber etwas verschoben. Es muss darauf geachtet werden, dass auf dem Registrierpapier pro Masse nur ein Umlauf des Rades registriert wird, da es sonst schwierig ist, die verschiedenen Umläufe zu unterscheiden.

2. Das Rad wird durch Befestigen des Zusatzgewichtes am Rand einer Speiche als physikalisches Pendel ausgebildet. Die Schwingungsdauer des Pendels für 10 Schwingungen ist für kleine Amplituden zu messen. Die Messung wird danach mit dem Zusatzgewicht an der diametral gegenüberliegenden Speiche wiederholt. Der Radius der Felge R, des Zusatzgewichtes z, sowie des Rades für den Bindfaden r sind an verschiedenen Stellen zu bestimmen, um das Trägheitsmoment berechnen zu können. Da der Schwerpunkt verschoben ist, ist die Formel für Θ herzuleiten!

1 Durch die sich ergebenden Nichtlinearitäten würden sich große Fehler ergeben.

Zu messenden Größen: Zeitmarken für 4 verschiedene Beschleunigungsmassen, Umfang des Rades, Radien des Papierstreifens und des Rades für den Bindfaden, Masse des Zusatzgewichtes, Abstand des Schwerpunkts des Pendels von der Drehachse, 2 Schwingungsdauern des Pendels.

3.7 Angaben

Bitte notieren Sie die Angaben auf den Körpern, bzw. am Versuchsplatz.

3.8 Auswertung

3.8.1 Teil A

1. Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße muss die gemessene Abhängigkeit des Winkelausschlages vom angreifenden Drehmoment grafisch aufgetragen und durch lineare Regression deren Steigung bestimmt werden.[2]
2. Aus den Messungen unter 3. kann man dann auf zwei Arten die Trägheitsmomente der Körper bestimmen:
   (a) aus den gemessenen Schwingungsdauern
   (b) aus Gestalt und Masse der Körper.
   Leiten Sie die entsprechenden Formeln her.
3. Aus den Schwingungsdauern des Tischchens sind für die unterschiedlichen Winkel die Trägheitsmomente zu bestimmen und die reziproken Quadratwurzeln der Tragheitsmomente ($\frac{1}{\sqrt{\Theta}}$) in Form eines Polardiagramms grafisch aufzutragen. Aus der Form der Ellipse ermittle man die Hauptträgheitsachsen Θ_A und Θ_B des Tischchens.

3.8.2 Teil B

1. Durch Auftragen des Abstands der Zeitmarken auf dem Papier gegen die Zeit ist mittels linearer Regression die Winkelbeschleunigung zu berechnen. Aus diesen Kurven kann nun das Trägheitsmoment Θ bestimmt werden (Bitte herleiten!):

   $$\Theta = \frac{r\,R\,m\,g}{a} - m\,r^2 \tag{3.7}$$

   mit m : beschleunigende Masse; a : gemessene Beschleunigung auf dem Papierstreifen; r : Radius des Rades für den Bindfaden; R : Radius der Felge.
2. Aus der Schwingungsdauer T des Rades mit Zusatzgewicht m im Abstand z von der Drehachse ist das Trägheitsmoment des Rades zu bestimmen. Die Formel lautet (bitte herleiten!):

   $$\Theta = \frac{T^2\,g\,z\,m}{4\pi^2} - m\,z^2 \tag{3.8}$$

   Vergleichen Sie die Ergebnisse aus 1. und 2.

2 Warum kann die Winkelrichtgröße D für eine Auslenkung nach rechts verschieden sein von der in die andere Richtung? Welche Auswirkung kann dies auf die im folgenden zu messenden Beziehungen haben?