2 Die Gravitationswaage

Die Gravitationskonstante γ stellt eine der wichtigsten und universellsten physikalischen Größen dar. Seit der Entdeckung des Gravitationsgesetzes durch Isaak Newton im Jahre 1667 bedeutete ihre experimentelle Bestimmung eine besondere Herausforderung für alle Physiker. Bis in die heutige Zeit werden Anstrengungen für immer genauere Messungen unternommen. Die prominenteste Bestimmungsmethode ist die Gravitationswaage von CAVENDISH und EÖTVÖS.[1] Ihr Experiment soll im Rahmen dieses Versuches rekapituliert werden. Gleichzeitig werden das Gravitationsgesetz sowie die daraus folgenden Gleichungen der Planetenbahnen, speziell die Keplerschen Gesetze, erläutert.

2.1 Stichworte

Gravitationskonstante, Gravitationsgesetz, Planetenbahnen, Keplersche Gesetze, gedämpfte harmonische Schwingungen, Torsionsschwingung, Torsionsmodul.

2.2 Literatur

Gerthsen, S. 41ff; BS-1: S.122ff (sehr ausführlich); Nolting, Schur und Mitarbeiter, Phys. Blätter 55 (1999), Nr.4, S.51-53 [65]; NPP; Walcher.

2.3 Zubehör

Der Versuch ist fertig aufgebaut und justiert. Die benötigte Stoppuhr holen Sie bitte aus dem Messgeräteschrank. Bild 2.1 zeigt den Versuch mit Zubehör.

2.4 Grundlagen

2.4.1 Theorie

Der[2] Legende nach inspirierte ein fallender Apfel im Garten seiner Eltern in Woolsthorpe ISAAK NEWTON im Jahr 1665 zur Formulierung des Gravitationsgesetzes. Demzufolge wirkt zwischen zwei Körpern der Masse M_1 und M_2 eine Zentralkraft $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{F}(M_1, M_2, r)\,. \tag{2.1}$$

Aus Beobachtungen wurde auf zwei Abhängigkeiten geschlossen:

1. $\vec{F} \propto r^{-2}$ (Newton)

1 Cavendish wollte übrigens nicht die Gravitationskonstante, sondern die Erdmasse bestimmen.
2 warscheinlich von ihm selbst stammenden

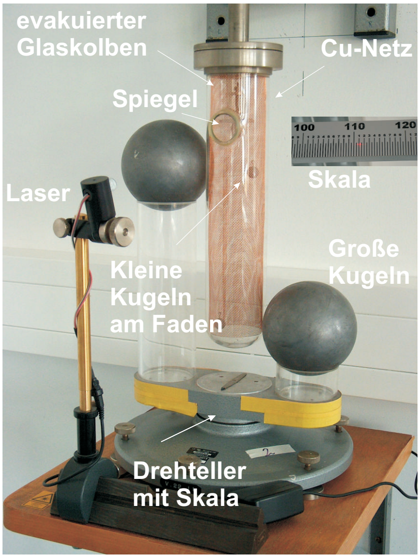

Bild 2.1: Gravitationswaage bestehend aus zwei an einem Torsionsfaden aufgehängten kleinen Kugeln in einem evakuierten Glaskolben, mit einem Spiegel am Faden und einem umgebenden Kupfernetz. Der Spiegel wird mit einem Laser beleuchtet und auf einer gegenüberliegenden Skala abgebildet. So wird die Torsion des Fadens sichtbar.

2. $\vec{F} \propto M_1, \vec{F} \propto M_2$

Daraus formulierte NEWTON die Gravitationskraft zwischen zwei Masse-behafteten Körpern M_1 und M_2 im Abstand r wie folgt:

$$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{M_1 M_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \tag{2.2}$$

γ ist hierbei die Gravitationskonstante. Ist diese Größe bekannt, ist zugleich eine absolute Bestimmung der Erdmasse (also eine Wägung der Erde) und aller anderen Himmelskörper möglich, für welche zuvor nur Relativmassen angegeben werden konnten.

Die Entdeckung des Gravitationsgesetzes bedeutete auch den Durchbruch in der Erklärung der Planetenbahnen. Erstmals war es möglich, die bis dahin von JOHANNES KEPLER empirisch gefundenen Gesetze zur Planetenbewegung physikalisch zu verifizieren.

2.4.2 Versuchsaufbau

Bild 2.2 zeigt schematisch den Versuchsaufbau. Die von CAVENDISH und EÖTVÖS konstruierte Torsionswaage zur Bestimmung der Gravitationskonstante besteht aus einem dünnen Torsionsfaden, an dessen Ende zwei kleine Metallkugeln und ein Spiegel angebracht sind. Über einen Lichtzeiger kann die Drehung des Torsionsfadens durch Reflexion am Spiegel auf einer Skala gemessen werden. Das ganze System ist evakuiert und zur Schwingungsdämpfung in der Wand verankert. Außerhalb des Glaszylinders sind zwei große Bleikugeln drehbar gelagert. Zwischen diesen großen und den kleinen Kugeln wirkt also die Gravitationskraft, welche die kleinen Kugeln so weit aus der Ruhelage auslenken, bis Gravitationsmoment M_{grav} und Torsionsmoment $D\phi$ sich genau kompensieren. Das Torsionsmoment eines Torsionsfadens mit Radius r_F und der

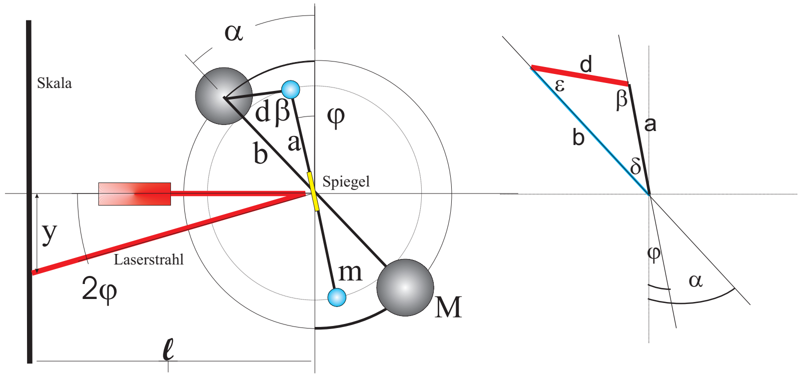

Bild 2.2: Skizze des Aufbaus einer Gravitationswaage. Die benötigten Winkel und Längenangaben sind eingezeichnet. Das Dreieck zur Abstandsberechnung ist rechts nochmal veranschaulicht. Im Aufbau sind die Kugeln diametral auf unterschiedlichen Höhen angebracht.

Länge L_F ergibt sich über das Torsionsmodul G zu:

$$D\varphi = G \cdot \frac{\pi\, r_\mathrm{F}^4}{2L_\mathrm{F}} \cdot \varphi \tag{2.3}$$

Werden nun die großen Kugeln gedreht, vollführt der Torsionsfaden eine Schwingung um eine neue Ruhelage φ. Aus der Schwingungsdauer T folgt die Winkelrichtgröße D. Der relative Abstand zweier spiegelverkehrter Ruhelagen ergibt nach Kompensation des Torsionsmomentes die Gravitationskonstante. Im Gleichgewicht von Torsionsmoment $D\varphi$ und Gravitationsmoment M_grav gilt also:

$$D\varphi = M_\mathrm{grav} = 2a\gamma\frac{Mm}{d^2}\sin\beta\,, \tag{2.4}$$

wobei M die Masse der großen Kugeln mit Radius R und Abstand b von der Drehachse, m die Masse der kleinen Kugeln mit Radius r und Abstand a von der Drehachse sind. Große und kleine Kugeln haben eine gemeinsame zentral Drehachse. β ist der eingeschlossene Winkel zwischen der Verbindungsachse der kleinen Kugeln und Verbindungslinie zu der näherliegenden großen Kugel. d bezeichnet deren Abstand. Aus der Schwingungsdauer T kann dann die Winkelrichtgröße D des Torsionsmoments experimentell bestimmt werden.

$$T = 2\cdot\pi\sqrt{\Theta/D} \tag{2.5}$$

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2}\Theta; \qquad \Theta : \text{Trägheitsmoment der Torsionshantel} \tag{2.6}$$

$$\Theta = 2m\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right); \qquad \text{siehe Versuch 3 »Trägheitsmomente«.} \tag{2.7}$$

Mit Hilfe des Sinussatzes in Bezug auf das Dreieck in Abb. 2.2,

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\delta}{d} = \frac{\sin\varepsilon}{a} \tag{2.8}$$

kann $\sin\beta = {}^{b\sin\delta}/_{d}$ berechnet werden. Der Winkel $\delta = (\alpha - \varphi)$ kann für kleine Auslenkungswinkel φ ohne großen Fehler mit dem Winkel α gleichgesetzt werden.[3] Mit Hilfe des Kosinussatzes im gleichen Dreieck folgt für den Abstand d:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta\,, \tag{2.9}$$

wobei δ wie oben wieder mit geringem Fehler mit α gleichgesetzt werden kann. Insgesamt ergibt sich damit:

$$\gamma = 4\pi^2\varphi\frac{(\frac{2}{5}r^2 + a^2)(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)^{3/2}}{T^2 Mab\sin\alpha}\,. \tag{2.10}$$

2.5 Fragen

1. Geben Sie für die beiden Abhängigkeiten $\vec{F} \propto r^{-2}$ und $\vec{F} \propto M_i$ jeweils ein prominentes Beobachtungsbeispiel an.
2. Was kann insbesondere aus der zweiten Abhängigkeit $\vec{F} \propto M_i$ über das Verhältnis von schwerer und träger Masse ausgesagt werden?
3. Nennen Sie die drei KEPLERschen Gesetze. Wie ist Kepler zu diesen Aussagen gekommen?
4. Benennen Sie für die ersten beiden Gesetze zwei explizite physikalische Begründungen anhand der Form des Gravitationsgesetzes.
5. Geben Sie für den Fall einer Ellipse, also einer Planetenbahn, die Gleichungen für die große und kleine Halbachse an. Begründen Sie hieraus das dritte Keplersche Gesetz. Gilt es eigentlich auch für die kleine Halbachse? Begründen Sie bitte Ihre Antwort.
6. Erklären Sie bitte den Sinn des Kupfergitters im Glaszylinder.
7. Zeigen Sie bitte anhand der Herleitung der Formel, warum die Masse der kleinen Kugeln zur Berechnung der Gravitationkonstante nicht benötigt wird.
8. Warum ist es sinnvoll, zwei spiegelsymmetrische Auslenkungen der großen Kugeln zu nehmen anstatt zweier beliebiger? Erinnern Sie sich bitte hieran bei der Auswertung.
9. Was sind die wichtigsten Fehlerquellen des Versuches? Versuchen Sie eine Abschätzung dieser Fehlerquellen und vergleichen Sie diese mit dem Messfehler.

2.6 Weiterführendes

1. Skizzieren Sie kurz die Herleitung der Kegelschnittgleichung für die Planetenbahnen. Eine kleine Hilfe: Betrachten Sie die Energie und den Drehimpuls in Polarkoordinaten und führen Sie eine Trennung der Variablen durch. Diskutieren Sie bitte insbesondere die Fälle unterschiedlicher Exzentritäten.

3 Die Auslenkung des Zeigers beträgt maximal einige wenige Grad.

2. Der Torsionsfaden soll einen möglichst kleinen Radius haben, um große Schwingungsamplituden, bzw. genügend große Schwingungsdauern zu ermöglichen. Gleichzeitig muss der Faden aber das Gewicht der kleinen Kugeln tragen. Wie kann man dies optimieren?
3. Sowohl Newtons als auch Galileis Erklärungen beider Gesetzmäßigkeiten waren etwas naiv. Insbesondere Galileis Erklärung der Proportionalität zwischen schwerer Masse und Gravitationskraft hat einen kleinen Haken, dessen Phänomen allen vertraut ist. Welches ist es, und wie kann man es erklären?
4. (Für Interessierte) Im August 1999 flog die Cassini-Sonde auf ihrem Weg zum Saturn in ca. 3000 km Entfernung an der Erde vorbei, um mehr Energie für den siebenjährigen Flug zu bekommen. Seit Pioneer 10 ist dieses Verfahren zur Energiegewinnung bei Raumflügen sehr verbreitet. Können Sie erklären, wie es prinzipiell funktioniert? Ein Hinweis: Das Manöver nennt sich *Swing-by*. Betrachten Sie die Energieerhaltung in einem konservativen Zentralkraftfeld. Wofür gilt die also?

2.7 Durchführung

1. Notieren Sie bitte die Nummer der Apparatur (I, II oder III) und bestimmen Sie die Null-Lage (Skalenablesung) der ruhenden Drehwaage ohne Beeinflussung durch die äußeren Kugeln (alle 4 Kugeln in einer Ebene).[4]
2. Man drehe nun die äußeren Kugeln sehr behutsam und langsam um den Winkel $\alpha = +45^\circ$ (maximales äußeres Drehmoment) und messe in Abständen von 15 s den ganzen zeitlichen Verlauf der Lichtzeigerauslenkung $y(t)$ über 5 oder mehr Perioden. Aus den Maximalausschlägen y_i bestimme man die neue Endeinstellung $\bar{y}$ des Lichtzeigers und die Schwingungsdauer T der Drehwaage. Zur Ermittlung von $\bar{y}$ errechne man aus je drei aufeinanderfolgenden Maximalausschlägen y_i nach der Beziehung $\bar{y} = (y_1 + y_3 + 2y_2)/4$ die zu erwartenden Endeinstellungen[5] $\bar{y}$ des Lichtzeigers und mittele über alle erhaltenen Werte $\bar{y}$.
3. Man lenke nun die großen Kugeln - möglichst bei gleichsinniger Schwingung der kleinen Kugeln - wieder sehr langsam und behutsam aus der bisherigen Lage um $-2\alpha = -90^\circ$ in die entgegengesetze Spiegellage (d.h. $\alpha = -45^\circ$) aus und verfahre wie zuvor.
4. Nach der Messung sind die großen Kugeln wieder auf 0° zurückzudrehen.

2.8 Angaben

Die Parameter der einzelnen Gravitationswaagen sind in Tabelle 2.1 angegeben. Bitte beachten Sie jedoch auch eventuelle Korrekturangaben zu den einzelnen Größen an der Apparatur.

Der Torsionsfaden besteht aus gezogenem Wolframdraht mit einen Durchmesser von $d_\mathrm{F} = 2r_\mathrm{F} = 20\,\mu$m. Das Torsionsmodul für diesen Wolframdraht beträgt nach Herstellerangabe $G = 185$ GPa, seine Zugfestigkeit beträgt $\sigma_\mathrm{B} = 4{,}17$ GPa und der E-Modul $E = 401$ GPa. Die effektive Länge des Torsionsfadens vom oberen Befestigungspunkt bis zum Aufhängebalken der kleinen Kugeln beträgt $L_\mathrm{F} = 720\,\mathrm{mm} \pm 10\,\mathrm{mm}$. Die kleinen Kugeln sind an einer Aufhängevorrichtung (mit Spiegel) befestigt, so dass deren gesamtes Trägheitsmoment $\Theta_{\mathrm{Aufh.}} = 4{,}08\ \mathrm{g \cdot cm^2} \pm$

4 Die Kugeln sollten hoffentlich in einer Ebene stehen. Vorsicht: Hat man eine Schwingung angestoßen, kann diese nicht mehr zur Ruhe gebracht werden!

5 Man kann sich dieses Verfahren schnell anhand einer Skizze einer gedämpften Schwingung veranschaulichen

Tabelle 2.1: Parameter der Gravitationswaagen.

Parameter/Apparatur	I	II	III
Senkrechte Lichtzeigerlänge l	265 cm	271 cm	259 cm
Masse der großen Kugeln M	10 142 g	9 993 g	10 045 g
Masse der kleinen Kugeln m	20 g	20 g	20 g
Radius der kleinen Kugeln r	0,75 cm	0,75 cm	0,78 cm
Abstand Schwerpunkt-Drehachse kleine Kugeln a	2,40 cm	2,40 cm	2,30 cm
Abstand Schwerpunkt-Drehachse große Kugeln b	10,15 cm	10,20 cm	10,30 cm

$0{,}18\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2$ zum Gesamtdrehmoment am Torsionsfaden hinzuaddiert werden muss.

2.9 Auswertung

1. Man trage für beide Lagen die Auslenkung gegen die Zeit auf. Man bestimme die Schwingungsdauer T aus den Nulldurchgängen der Funktion $y(t)$ in der Zeichnung.
2. Man berechne aus den Beträgen der unter 2. und 3. ermittelten Endeinstellungen den gewichteten Mittelwert der Auslenkung $\bar{y}$ des Lichtzeigers. Hieraus kann die mittlere Auslenkung φ der Drehwaage bestimmt werden. Daraus ergibt sich schließlich die Gravitationskonstante γ nach der Näherungsformel 2.10:

$$\gamma = 4\pi^2 \cdot \varphi \cdot \frac{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)^{3/2} \cdot (a^2 + \frac{2}{5}r^2)}{a\,b\,M\ \sin\alpha \cdot T^2}\ . \tag{2.11}$$

3. Bestimmen Sie bitte auch die Gravitationskonstante für beide Lagen der großen Kugeln unabhängig voneinander, indem Sie den absoluten Abstand der Ruhelage von der Nulllage für die Messung verwenden. Warum ergibt sich dieses Ergebnis?
4. Bis heute ist die Gravitationskonstante die am ungenauesten bekannte Naturkonstante. Vergleichen Sie bitte Ihr Ergebnis mit den in Bild 2.3 angegebenen aktuellen Messdaten anderer Forschergruppen, welche teilweise unter enormem Messaufwand erzielt werden. Bewerten Sie Ihr Ergebnis im Hinblick auf den Messaufwand.

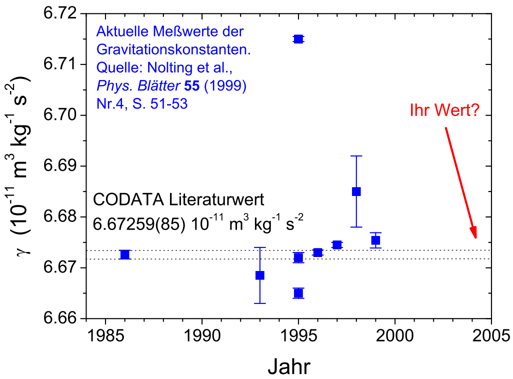

Bild 2.3: Neuere Messungen der Gravitationskonstanten [65].

5. Berechnen Sie mit dem Literaturwert der Gravitationskonstante das Torsionsmodul des Torsionsfadens.

2.10 Bemerkungen

Die Apparatur einschließlich Beleuchtung darf nur zur Auslenkung der großen Kugeln und nur an den mit gelbem Tesa-Band versehenen Stellen berührt werden, um störende elektrostatische Aufladungen zu vermeiden.

Einmal in Bewegung gesetzt, ist die Schwingung der Gravitationswaage am Versuchstag nicht mehr zu stoppen.