1 Der Pohlsche Resonator

In diesem Versuch wird die erzwungene gedämpfte Schwingung eines mechanischen Systems behandelt. Die hier behandelten Differentialgleichungen (Schwingungsgleichungen) sind in vielen Bereichen der Physik von großer Bedeutung, z.B. beim elektrischen Schwingkreis. Das Verständnis von Resonanzerscheinungen und Phasenverschiebungen ist notwendig, da sie unter anderem in der Atom-, Festkörper- und Astrophysik eine wichtige Rolle spielen. Die Aufnahme der Messwerte des Pohlschen Resonators erfolgt computergesteuert mit Hilfe eines Winkelkodierers und einer Schrittmotorsteuerung. Der zeitliche Verlauf der Bewegung des Resonators für verschiedene Frequenzen und Dämpfungen, sowie die jeweiligen Phasenraumprojektion werden während der Datenaufnahme auf einem Computer ausgegeben und in eine Datei gespeichert. Die eigentliche Auswertung erfolgt anhand dieser gespeicherten Messdaten.

1.1 Stichworte

Pohlscher Resonator; Schwingungsgleichung; harmonische Schwingung; erzwungene, gedämpfte Schwingung; Wirbelstrombremse; homogene und inhomogene Differentialgleichung; Bewegungsgleichung; Resonanzkurve; Phasenverschiebung; Einschwingvorgang; logarithmisches Dekrement.

1.2 Literatur

NPP [19] S.74-81; Gerthsen: Kap.2.1-2.3 [62]; Walcher [89], 2.7; Dem-1 [11]: 5.1-5.6, 10.1-10.6; Geschke [26]; Joos: Lehrbuch der theoretischen Physik: erzwungene Schwingungen [39]; BS-1: Kap. III-IV [84].

1.3 Zubehör

Bild 1.1 zeigt den Versuch mit Zubehör: Pohlscher Resonator mit Winkelkodierer und Wirbelstrombremse, Schrittmotor, Computer zur Steuerung und Datenaufnahme, Internetverbindung.

1.4 Grundlagen

Auf die Drehscheibe mit dem Trägheitsmoment Θ wirkt durch die Spiralfeder ein zum Auslenkungswinkel φ proportionales Rückstellmoment $D^*\varphi$ (D^* wird auch als Winkelrichtgröße bezeichnet). Die Wirbelstrombremse (und natürlich auch Reibungsverluste) erzeugen ein bremsendes Moment $\rho\dot{\varphi}$, das proportional zur Winkelgeschwingigkeit angenommen wird (ρ ist der Reibungskoeffizient). Mit dem äußeren periodischen Anregungsmoment $M\cos\omega t$ erhalten wir

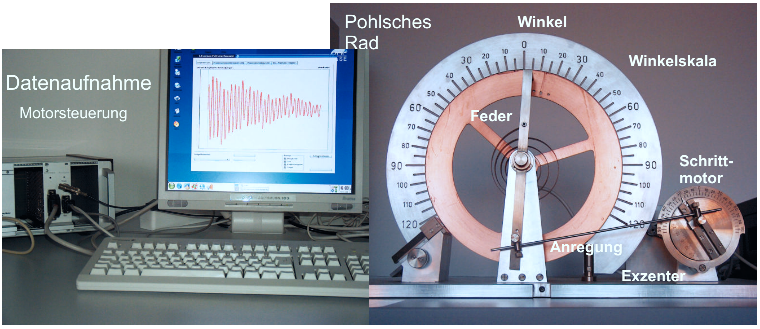

Bild 1.1: Pohlscher Resonator bestehend aus einer Schwungscheibe mit Rückstellfeder und Winkelskala, Erreger (Schrittmotor) mit Exzenter und Winkelskala, Wirbelstrombremse mit Millimetertrieb, Computer zur Steuerung des Schrittmotors und zur Datenaufnahme.

die Bewegungsgleichung für die erzwungene gedämpfte Schwingung des Pohlschen Rades:

$$\Theta \ddot{\varphi} + \rho \dot{\varphi} + D^* \varphi = M \cos \omega t \,, \tag{1.1}$$

wobei ω als Erregerfrequenz bezeichnet wird. Bringen wir dies auf die Normalform, indem wir durch Θ teilen, erhalten wir mit $2\beta = \rho/\Theta$, $\omega_0^2 = D^*/\Theta$ und $N = M/\Theta$ eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = N \cos \omega t \,. \tag{1.2}$$

Für das freie Rad (ohne Antrieb, $N = 0$) gelangen wir mit dem Ansatz $\varphi \sim \exp(\lambda t)$ zur Lösung für den Schwingfall ($\beta^2 < \omega_0^2$):

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp(-\beta t) \exp(i(\omega_e t - \phi)) \,, \tag{1.3}$$

wobei die Eigenfrequenz ω_e gegeben ist durch:

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{1.4}$$

Eine solche Kurve ist in Bild 1.2 dargestellt. Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Maxima ist nur von der Dämpfung abhängig $\varphi(t)/\varphi(t+T) = \exp(+\beta T)$, was zur Definition des Logarithmischen Dekrements Λ führt:

$$\Lambda = \ln\left[\varphi(t)/\varphi(t+T)\right] = \ln\left[\exp(+\beta T)\right] = \beta T \,. \tag{1.5}$$

Hiermit kann leicht die Dämpfung eines schwingenden Systems bestimmt werden.

Für die erzwungene Schwingung muss zusätzlich zur gerade beschriebenen homogenen Lösung jetzt noch eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung gesucht werden. Die gelingt beispielsweise mit dem Ansatz $\varphi = \varphi_0/2 \cdot \exp(i(\omega t - \phi)) + c$ und führt auf die Lösung für die

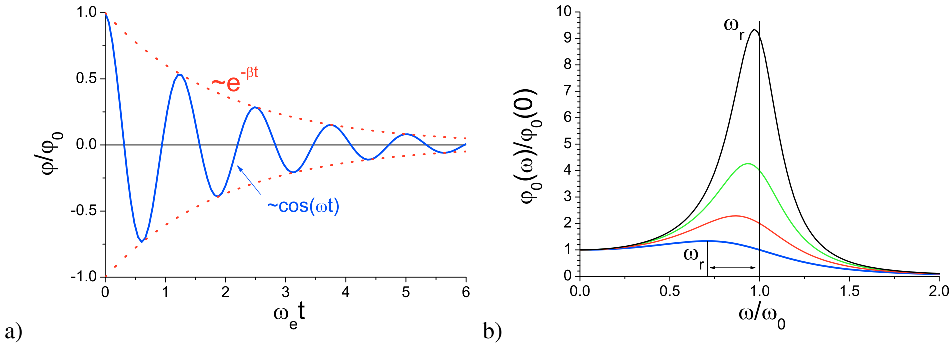

Bild 1.2: Schwingungen: a) Zeitlicher Verlauf einer gedämpften freien Schwingung. Beachten Sie die Einhüllende; b)Frequenzgang einer erzwungenen gedämpften Schwingung für verschiedene Dämpfungen. Beachten Sie die Verschiebung des Resonanzmaximums ω_r.

stationäre erzwungene Schwingung:

$$\varphi = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right) . \tag{1.6}$$

Der Vorfaktor kann auch als Amplitude φ_0 bezeichnet werden. Den konstanten additiven Term bezeichnen wir als Phasenverschiebung ϕ: [1]

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) . \tag{1.7}$$

Die Amplitude φ_0 wird maximal (bitte herleiten!) für die Resonanzfrequenz ω_r, die sich ergibt als:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} . \tag{1.8}$$

Daraus ist ersichtlich, dass auch die Resonanzkurve und die Phasenverschiebung zur Bestimmung der Dämpfung benutzt werden können. Eine solcher Frequenzgang (Amplituden-Kurve) ist in Bild 1.2b dargestellt. Die Phasenverschiebung ϕ verhält sich für verschiedene Dämpfungen wie in Bild 1.3 dargestellt.

1.5 Fragen

1. Erläutern Sie das Zustandekommen der Differentialgleichung des Pohlschen Resonators:

$$\Theta\ddot{\varphi}(t) + \rho\dot{\varphi}(t) + D^*\varphi(t) = M\cos(\omega t). \tag{1.9}$$

1 Beachten Sie die Quadranten, eine Phasenverschiebung von $-\pi$ ist identisch zu $+\pi$

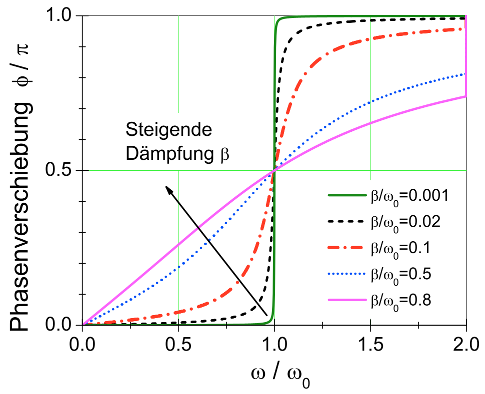

Bild 1.3: Phasenverschiebung einer getriebenen Schwingung für verschiedene Dämpfungen.

Wie kommt man von hier auf die Dämpfung β, die Eigenfrequenz ω_0 und das logarithmische Dekrement Λ?

2. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung kann als bekannt vorrausgesetzt werden. Wie wird die inhomogene Gleichung gelöst?
3. Warum spielt die homogene Lösung für den stationären Zustand der erzwungenen Schwingung keine Rolle mehr?
4. Leiten Sie bitte die Formel für die Schwingungsamplitude

$$\varphi_0 = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{1.10}$$

her und diskutieren Sie diese kurz als Funktion der Erregerfrequenz ω. Leiten Sie auch die Gleichung für die Phasenverschiebung ϕ des Resonators her:

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{1.11}$$

Diskutieren Sie bitte auch diese Funktion (grafisch). Was passiert im Resonanzfall?

5. Warum kann es nützlich sein, das Quadrat der Amplitude zu betrachten?

1.6 Weiterführendes

1. Was ist eine Wirbelstrombremse? Erläutern Sie ihre Wirkungsweise. Nennen Sie ein Anwendungsbeispiel. Warum eignet sie sich so gut für diesen Versuch?

1.7 Durchführung

1.7.1 Vorbereitung

Die Computer zur Steuerung und Datenaufnahme laufen unter dem Betriebssystem LINUX, beachten Sie dies bitte beim Starten des PCs. Schalten Sie die Motorsteuerung in dem separaten

Kasten ein. Melden Sie sich mit der Benutzerkennung »prakt« und dem Passwort »prakt« an und starten Sie das Programm »kPohl« über das Icon auf dem Desktop. Ihre Messdaten werden in einem anzugebenden Verzeichnis gespeichert. Von Vorteil ist ein eindeutiger Name wie z.B. das aktuelle Datum im Format JJMMTT (Jahr, Monat, Tag). Dieses Verzeichnis wird dann als Unterordner von »/home/prakt/« angelegt. Bitte nicht in anderen Verzeichnissen Daten verändern oder löschen.

1.7.2 Bedienung des Meßprogramms

Das Programm »kPohl« ist eine grafische Oberfläche für die Messwertaufnahme am Pohlschen Resonator.

1. Starten Sie das Programm »kPohl«, falls dies noch nicht geschehen ist.
2. Sie stehen nun vor der Wahl, entweder einen schon vorhanden Datensatz zu öffnen und daran weiterzuarbeiten oder aber einen neuen Datensatz anzulegen. Wählen Sie »Neuen Datensatz anlegen«
3. Geben Sie nun einen aussagekräftigen Namen für ein Verzeichnis an. Es wird ein Verzeichnis mit gleichem Namen angelegt, in dem die Daten nach jeder Messung automatisch gespeichert werden. Das Format der Daten ist weiter unten erläutert.
4. Klicken Sie auf den Button »Neue Messung«, um eine neue Messreihe anzulegen.
5. Geben Sie einen eindeutigen Namen für die Messreihe an, z.B. `d2_f100.dat`. Die Frequenz geben Sie bitte in Millihertz (mHz) an, mit der der Exzenter betrieben werden soll. Ein Wert von 250 lässt den Exzenter also in 4 Sekunden eine vollständige Umdrehung durchführen. Bei der Eingabe von 0 ist der Exzenter deaktiviert.
6. Starten Sie die Messung mit einem Klick auf »OK«.
7. Das Pohlsche Rad befindet sich nun im Einschwingvorgang. Dabei wird der Amplitudenverlauf grafisch aufgetragen. Mit dem Knop »Reset« kann das Diagramm zurückgesetzt werden, während die Messung weiterläuft.
8. Wenn der Einschwingvorgang beendet ist, starten Sie die Messung durch einen Klick auf den Button »Messung starten«.
9. Durch einen Klick auf die Reiter »Amplitude«, »Phasenraum«, etc., können Sie sich verschiedene Messdaten schon während der Messung anschauen.
10. Wenn sie genug Daten haben, beenden Sie die Messung mit einem Klick auf »Messung beenden«

Die schon durchgeführten Messungen lassen sich in der Auswahlliste links erneut anschauen. Nicht erfolgreiche Messungen lassen sich nach Auswahl durch einen Klick auf »Messung löschen« wieder entfernen.

1.7.3 Durchführung

1. Starten Sie die Messung für die freie Schwingung für vier verschiedene Stellungen des Millimetertriebs der Wirbelstrombremse: 0, 4, 6 und 8 mm. Regen Sie den Resonator bei abgeschaltetem Motor zu Eigenschwingungen an (Anregung 0 Hz; fall nötig die Nulllage des Motors vorher per Software einstellen). Dabei die Auslenkung der Drehscheibe von Hand auf 120° stellen und loslassen.

2. Messen Sie nun bitte die erzwungene gedämpfte Schwingung. Für drei verschiedene Dämpfungen 4, 6 und 8 mm (Stellung am Millimetertrieb der Wirbelstrombremse) führen Sie dazu jeweils die nachfolgenden Schritte durch:

   a. Nehmen Sie für die jeweils eingestellte Dämpfung für genügend viele verschiedene Frequenzen (100-600 mHz) die Schwingung des Oszillators auf. Stellen Sie sicher, dass nach dem Einschwingvorgang[2] auch noch genügend viele Schwingungen aufgezeichnet werden.
   b. Während und nach einer Messung für eine bestimmte Erregerfrequenz wird der bisher gemessene Frequenzgang im Programm angezeigt. Machen Sie insbesondere in der Nähe der Resonanz viele Messungen. Achten Sie dabei jedoch auf eine mögliche Resonanzkatastrophe. In diesem Fall ist die Messung sofort über »Messung stoppen« zu beenden.

Das Programm legt mehrere Dateien an, von denen eine den Namen »index.txt« hat. In dieser Datei werden allgemeine Informationen über jede Messreihe gespeichert. Unter anderem finden sich dort der Name der Messung, die Frequenz des Exzenters und der Nullpunkt des Exzenters in ms, welcher einen Zeitpunkt angibt, an dem der Exzenter einen Nulldurchlauf hatte. Hieraus lässt sich die Phasenverschiebung berechnen.

Eine weitere Information zu den Messungen in der Datei ist der jeweilige Dateiname mit den einzelnen Messparametern. Diese Dateinamen sind von der Form »messung0.txt«. In diese Dateien sind alle gesammelten Messdaten einer Messung gespeichert, pro Zeile ein Messpunkt. Die erste Spalte ist die Zeit in ms (Millisekunden), die zweite Spalte die Amplitude und die dritte Spalte die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe.

Übertragen Sie sie über das Internet[3] auf einen für Sie zugänglichen Speicherort. Am einfachsten geht dies mit einer E-Mail an sich selbst. Ihr/e Betreuer/in kann Ihnen dabei helfen. Es ist günstig die Dateien zuerst zu einer einzigen großen Datei zu packen (ZIP). Hierfür kann das Programm »Archivierung« unter dem Menüpunkt »Dienstprogramme« verwendet werden.

1.8 Auswertung

1. Bitte tragen Sie die Abklingkurven $\varphi_0(t)$ aus Messung 1 (linear oder halblogarithmisch) für alle Dämpfungen (gemeint ist hier die Stellung der Wirbelstrombremse) auf. Eventuell müssen Sie die Daten wie im Versuch 2 normieren, damit die Schwingung um den Nullpunkt verläuft.

2. Für jede Dämpfung ist hieraus die Eigenfrequenz ω_e, das logarithmische Dekrement Λ, und daraus die jeweilige Dämpfungskonstante β zu bestimmen.

3. Bestimmen Sie aus den vorhergehenden Ergebnissen die ungedämpfte Eigenfrequenz ω_0. Stimmt diese mit der Eigenfrequenz ω_e für die Stellung »0« der Wirbelstrombremse überein?

2 Woran ist dieser zu erkennen? Man beachte hierbei die Phasenraumprojektion.
3 Es kann aber auch eine Diskette oder ein USB-Stick mitgebracht werden

4. Für jede Dämpfung ist aus Messung 2b die Resonanzkurve (der Frequenzgang) aufzutragen. Das Verhältnis von Erregerfrequenz zur Eigenfrequenz des Resonators ω/ω_0 ist als Abszisse aufzutragen, als Ordinate das Verhältnis der Amplitude bei einer Frequenz in der Nähe von Null $\varphi_0(\omega)/\varphi_0(0)$. Dabei sollen die entsprechenden Kurven für die verschiedenen Dämpfungen in eine gemeinsame Figur gezeichnet werden.

5. Die gemessene Phasenverschiebung ϕ aus Messung 2b sollfür die verschiedenen Dämpfungen in eine gemeinsame Figur eingetragen werden (wieder ω/ω_0 als Abszisse). Es ist darauf zu achten, dass die Werte für ϕ zwischen 0 und 180° liegen. (Genaue Beachtung der Vorzeichen und der Richtung des Nulldurchgangs!).

6. Vergleichen Sie die gemessene Resonanzfrequenz ω_r mit der theoretisch erwarteten (ω_0 und β) aus Auswertung 2 und 3.

1.9 Bemerkungen

Man achte bei den Frequenzmessungen ständig und insbesondere bei schwachen Dämpfungen auf den Maximalausschlag des Resonators! Die Amplitude muss im Skalenbereich bleiben, nähert sie sich dem Maximalwert bei 120°, ist *sofort* die Frequenz des Motors aus dem Resonanzbereich herauszubringen (Resonanzkatastrophe)!

Die Auswertung, insbesondere das Finden der Maximalwerte kann zwar auch traditionell mit Papier und Bleistift erfolgen, aber aufgrund der Anzahl der Werte ist eine automatisierte Auswertung empfehlenswert. Hier bietet sich spezielle Datenanalysesoftware wie Origin oder ein kleines selbstgeschriebenes Programm an.

1.9.1 Packen der Messergebnisse

Die Messwerte befinden sich im Heim-Verzeichnis des Benutzers »prakt« und tragen den Namen des angelegten Projekts. Bei Befolgung des Namensvorschlags ist das Verzeichnis also z.B. »/home/prakt/280506/«. Die Schritte zum Packen der Ergebnisse in eine ZIP-Datei sind: 1. Wechsel in das Heim-Verzeichnis des Benutzers: »cd«; 2. Überprüfen, ob das Projektverzeichnis existiert: »ls«; 3. Packen der Ergebnisse: »zip -r ergebnisse.zip 280506/ «. Hier wird das Verzeichnis »280506/« in die Datei »ergebnisse.zip« gepackt. Beide Namen sind anzupassen; 4. Nun kann die Datei »ergebnisse.zip« per Mail nach Hause geschickt werden.